Matemática Discreta (**Lista de exercícios 3**)

Cada $\surd$ denota um nível de dificuldade: $\surd$ fácil, $\surd\surd$ médio e $\surd\surd\surd$ difícil.

$\surd\surd$ **1.** (**indução**) Considere a versão forte do *Princípio da Indução Matemática*:

> Sejam $k_1 \geq k_2$ dois números inteiros. Seja $A \subseteq \mathbb{Z}$ um conjunto tal que
>
> 1. $\{k_1, \ldots, k_2\} \subseteq A$, e
> 2. se $n > k_2$ e $\{k_1, \ldots, n-1\} \subseteq A$, então $n \in A$.
>
> Então, $A \supseteq \{k_1, k_1 + 1, \ldots\}$.

Usando essa versão, mostre que, se $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ é uma potência de 2 ($n = 2^k$, para algum $k \in \mathbb{N}$), e uma função $T : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ é tal que

$$\begin{aligned} T(1) &= 1 \\ T(n) &= 2 \cdot T(n/2) + n, \quad n > 1, \end{aligned}$$

então $T(n) = n \log_2 n + n$, para todo n potência de 2.

$\surd\surd$ **2.** (**indução**) Como vimos, um *grafo* é um par $G = (V, E)$, onde V é um conjunto de elementos denominados *vértices*, e E é um conjunto de elementos denominados *arestas*, onde uma aresta é um subconjunto de V com dois vértices. Dizemos que o grafo G é *conexo* se, para todo par u e v de vértices, existe uma sequência $\langle u = v_1, v_2, \ldots, v_\ell = v\rangle$ de vértices de G tal que $v_i v_{i+1} \in E$, para todo $1 \leq i < \ell$. Mostre, por indução no tamanho de V, que, se $G = (V, E)$ é um grafo conexo, então $|V| \leq |E| + 1$.

$\surd$ **3.** (**recorrências**) Seja $n = 2^k$, para algum $k \in \mathbb{N}$. Resolva a seguinte relação de recorrência:

$$\begin{aligned} T(1) &= 13 \\ T(n) &= 5T(n/2) + 3n, \quad n > 1 \end{aligned}$$

$\surd$ **4.** (**recorrências**) Seja $n = 3^k$, para algum $k \in \mathbb{N}$. Resolva a seguinte relação de recorrência:

$$\begin{aligned} T(1) &= 29 \\ T(n) &= 3T(n/3) + 17n, \quad n > 1 \end{aligned}$$

$\surd$ **5.** (**permutações**) Se enumerarmos todas as permutações dos algarismos 1, 2, 3, 4 e 5 em ordem crescente, então:

1. que posição ocupa o número 42513?
2. qual número ocupa a posição 73?

$\surd\surd$ **6.** (**combinações**) Quantos são os subconjuntos de k elementos de $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ nos quais:

1. a_1 aparece?
2. a_1 não aparece?
3. a_1 e a_2 aparecem?

$\surd\surd$ **7.** (**combinatória**) Considere todos os subconjuntos com 5 elementos de $\{a_1, a_2, \cdots, a_{12}\}$. Se ordenarmos todos esses subconjuntos por ordem crescente de índices, em quantos subconjuntos o elemento a_8 aparece na posição 3 da sua ordenação?

$\surd\surd$ **8.** (**combinatória**) Quantas são as soluções de $x + y + z = 50$, sendo x, y e z números naturais? Quantas são as soluções de $x + y + z = 120$, sendo x, y e z números naturais, nas quais pelo menos uma incógnita é maior que 27?

$\surd\surd\surd$ **9.** (**combinatória**) Demonstre as seguintes afirmações:

1. $\binom{n+p+1}{p} = \sum_{r=0}^{p} \binom{n+r}{r}$
2. $\binom{n+p+1}{p+1} = \sum_{r=0}^{n} \binom{p+r}{p}$
3. $\binom{n+2}{p+2} = \binom{n}{p} + 2\binom{n}{p+1} + \binom{n}{p+2}$

$\surd\surd$ **10.** (**combinatória**) Determine o coeficiente de x^3 no desenvolvimento de

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^3}\right)^{99} \qquad \text{e} \quad \text{de} \qquad \left(x^2 + \frac{1}{x^3}\right)^{100}$$

$\surd$ **11.** (**grafos**) Considere o problema de Coloração de Mapas, onde países vizinhos recebam cores diferentes. Se três países fazem fronteira entre si (como Brasil, Argentina e Paraguai), então os três devem ter cores diferentes. Elabore um mapa que precise de pelo menos três cores e no qual **não** existam três países vizinhos entre si.

$\surd$ **12.** (**grafos**) Dizemos que um grafo é d-regular se todos os vértices tem grau d (lembre que o grau de um vértice é o número de arestas que o contém). Encontre todos os grafos 3-regulares com nove vértices.

$\surd\surd$ **13.** (**grafos**) Seja G um grafo e seja H um subgrafo de G. Para cada um dos itens abaixo, prove ou encontre um contra-exemplo:

- $\alpha(H) \leq \alpha(G)$
- $\alpha(H) \geq \alpha(G)$
- $\omega(H) \leq \omega(G)$
- $\omega(H) \geq \omega(G)$

$\surd\surd\surd$ **14.** (**grafos**) Dados inteiros positivos a e b, seja $R(a, b)$ o menor n tal que qualquer grafo G com n vértices tem $\omega(G) \geq a$ ou $\alpha(G) \geq b$. Lembre que o Teorema de Ramsey visto em sala provava que $R(3, 3) \leq 6$. Prove os seguintes itens:

(a) $R(2, 2) = 2$ e $R(3, 3) > 5$

(b) $R(n, 2) \leq n$ e $R(a, b) = R(b, a)$

(c) $R(3, 4) \leq 10$

(d) $R(4, 4) \leq 20$ (dica: use o item (c))