

Universidade Federal do Ceará
Departamento de Computação

Matemática Discreta
Lista de exercícios 2

Cada \surd denota um nível de dificuldade: \surd fácil, $\surd\surd$ médio e $\surd\surd\surd$ difícil.

$\surd\surd$ 1. (**relação de equivalência**) Mostre que, se R é uma relação reflexiva e transitiva, então $R \cap R^{-1}$ é uma relação de equivalência.

$\surd\surd\surd$ 2. (**ordens parciais**) Seja $P = (X, \preceq_P)$ o poset (conjunto parcialmente ordenado) tal que X é o conjunto dos divisores de 360 e $x \preceq_P y$ se e só se y é múltiplo de x .

- Faça o diagrama de Hasse do poset P .
- Liste os elementos minimais e maximais de P . Existe mínimo? Existe máximo?
- Calcule a altura de P .
- Calcule a largura de P .
- Mostre que a dimensão de P é maior ou igual a 3. **Dica:** Tente encontrar dentro de P o poset padrão de dimensão 3 (visto em sala de aula).

$\surd\surd$ 3. (**funções**) Sejam A e B dois conjuntos. Mostre que para quaisquer funções $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$ e $h : C \rightarrow D$, temos que $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

$\surd\surd$ 4. (**funções**) Dadas funções bijetivas $f : A \rightarrow B$ e $g : B \rightarrow C$, qual é a função composta $f^{-1} \circ g^{-1} \circ g \circ f$? Prove.

$\surd\surd$ 5. (**casa dos pombos**) Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $A \subseteq \{0, 1, \dots, 2n - 1\}$. Mostre que se $|A| = n + 2$, então existem $a \in A$ e $a' \in A$, $a \neq a'$, tais que $a + a' = 2n$.

\surd 6. (**inclusão e exclusão**) Numa sala de 155 alunos, 84 possuem laptop, 100 possuem email, 30 possuem homepage, 54 têm laptop e email, 15 têm laptop e homepage, 8 possuem email e homepage, e 3 alunos têm laptop, email e homepage. Responda as seguintes perguntas pelo Princípio da Inclusão-Exclusão: (a) Quantos alunos têm apenas email? (b) Quantos alunos não possuem nenhum dos 3 itens? (c) Quantos alunos têm laptop e homepage, mas não tem email?

\surd 7. (**inclusão e exclusão**) Quantos números entre 1 e 350.000 não são divisíveis por 7, 11 ou 13? Quantos números entre 1 e 350.000 não são divisíveis por 7, 11, 13, 17 ou 19?

\surd 8. (**indução matemática**) Prove por indução que todo natural $n \geq 8$ é a soma de um múltiplo de 3 e um múltiplo de 4 e também é a soma de um múltiplo de 3 e um múltiplo de 5.

$\surd\surd$ 9. (**indução matemática**) Prove por indução que

$$(a) \sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$(b) \sum_{k=0}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$