Universidade Federal do Ceará
Departamento de Computação

Matemática Discreta

Lista de exercícios 2

Cada $\surd$ denota um nível de dificuldade: $\surd$ fácil, $\surd\surd$ médio e $\surd\surd\surd$ difícil.

$\surd\surd$ **1.** (**relações**) Mostre que se R é uma relação reflexiva e transitiva, então $R \cap R^{-1}$ é uma relação de equivalência, onde $R^{-1} = \{(b,a) \mid (a,b) \in R\}$.

$\surd$ **2.** (**relações**) Sejam A um conjunto e $R \subseteq A \times A$ uma ordem parcial. Mostre que se $B \subseteq A$, então $R \cap (B \times B)$ é uma ordem parcial.

$\surd\surd$ **3.** (**funções**) Sejam A e B dois conjuntos. Mostre que para quaisquer funções $f : A \to B$, $g : A \to B$ e $h : A \to B$, temos que $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

$\surd\surd$ **4.** (**casa dos pombos**) Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $A \subseteq \{0, 1, \cdots, 2n-1\}$. Mostre que se $|A| = n+2$, então existem $a \in A$ e $a' \in A$, $a \neq a'$, tais que $a + a' = 2n$.

$\surd\surd\surd$ **5.** (**casa dos pombos**) Seja $A \subseteq \mathbb{N}$ um conjunto. Prove que, se $|A| = n+1$, então existem $a, a' \in A$, $a \neq a'$, tais que $a - a'$ é divisível por n. **Dica:** Observe que $a - a'$ é divisível por n se e somente se $a \bmod n = a' \bmod n$, onde mod significa o resto da divisão.

$\surd$ **6.** (**inclusão e exclusão**) Numa sala de 155 alunos, 84 possuem laptop, 100 possuem email, 30 possuem homepage, 54 têm laptop e email, 15 têm laptop e homepage, 8 possuem email e homepage, e 3 alunos têm laptop, email e homepage. Responda as seguintes perguntas pelo Princípio da Inclusão-Exclusão: **(a)** Quantos alunos têm apenas email? **(b)** Quantos alunos não possuem nenhum dos 3 itens? **(c)** Quantos alunos têm laptop e homepage, mas não tem email?

$\surd$ **7.** (**inclusão e exclusão**) Quantos números entre 1 e 350.000 não são divísveis por 7, 11 ou 13? Quantos números entre 1 e 350.000 não são divisíveis por 7, 11, 13, 17 ou 19?

$\surd$ **8.** (**indução matemática**) Prove por indução que todo natural $n \geq 8$ é a soma de um múltiplo de 3 e um múltiplo de 4 e também é a soma de um múltiplo de 3 e um múltiplo de 5.

$\surd\surd$ **9.** (**indução matemática**) Prove por indução que

$$\textbf{(a)} \quad \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\textbf{(b)} \quad \sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$\surd\surd$ **10.** (**indução matemática**) Seja $F : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ a função de Fibonacci, tal que $F(0) = 0$, $F(1) = 1$ e $F(n) = F(n-1) + F(n-2)$ para $n \geq 2$. Mostre, por indução em n, que

$$F(n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right\}$$

$\surd\surd$ **11.** (**recorrências**) Encontre uma fórmula fechada para a função $T : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ tal que $T(1) = 2$ e $T(n) = 3 \cdot T(n-1) + 2$ para $n \geq 2$.