Matemática Discreta (**Lista de exercícios 1**)

Cada $\surd$ denota um nível de dificuldade: $\surd$ fácil, $\surd\surd$ médio e $\surd\surd\surd$ difícil.

$\surd$ **1.** Denote por P a sentença "A comida é boa"; por Q a sentença "O serviço é bom"; e, por R, "A classificação é três estrelas". Escreva as seguintes sentenças usando P, Q, R e conectivos lógicos:

1. Ou a comida é boa, ou o serviço é bom, ou ambos.
2. Ou a comida é boa, ou o serviço é bom, mas não ambos.
3. A comida é boa, enquanto que o serviço é pobre.
4. Não há o caso em que a comida seja boa e a classificação seja três estrelas.
5. Se a comida e o serviço são bons, então a classificação é três estrelas.
6. Não é verdade que três estrelas sempre significa boa comida e bons serviços.

$\surd$ **2.** Construa a tabela verdade para as seguintes sentenças:

1. $(P \Rightarrow \neg Q) \vee \neg P$
2. $(P \vee \neg Q) \Rightarrow \neg Q$
3. $P \iff (\neg P \vee \neg Q)$
4. $(P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow ((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (P \Rightarrow R))$

$\surd\surd$ **3.** Considere a seguinte advertência feita na embalagem de um jogo:

1. Existem três sentenças nesta advertência.
2. Duas das sentenças desta advertêcia são falsas.
3. O incremento médio do QI das pessoas que aprendem este jogo é de mais de 20 pontos.

A última sentença é verdadeira ? Escreva a argumentação de sua resposta.

$\surd\surd\surd$ **4.** Um náufrago chega em uma ilha onde convivem duas tribos A e B. Todos os nativos da tribo A sempre mentem. Todos os nativos da tribo B sempre falam a verdade. Ao se deparar com um nativo, o náufrago fez a seguinte pergunta:

> "Existe ouro nesta ilha ?"

O nativo respondeu:

> "Existe ouro na ilha se e somente se eu falo a verdade."

Usando lógica matemática para analisar a resposta do nativo, descubra se existe ou não ouro na ilha.

$\surd$ **5.** Mostre quais das seguintes sentenças são verdadeiras quando o "$\in$" é colocado no lugar do "__". Em seguida, mostre quais delas são verdadeiras quando "$\subseteq$" é colocado no lugar do "__":

1. $\{\emptyset\}$ __ $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

2. $\{\emptyset\} \_\_ \{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}\}$.

3. $\{\{\emptyset\}\} \_\_ \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

4. $\{\{\emptyset\}\} \_\_ \{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}\}$.

5. $\{\{\emptyset\}\} \_\_ \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$.

$\surd\surd$ **6.** Demonstre que se $B \subseteq C$, então $\mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(C)$.

$\surd\surd\surd$ **7.** Demonstre que não existe um conjunto X tal que $\mathcal{P}(X) \subseteq X$.

$\surd\surd$ **8.** Demonstre que as seguintes sentenças são **V** para quaisquer conjuntos A, B e C:

1. $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B)$
2. $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$. Em que condições esses conjuntos são iguais ?
3. $A = (A \cap B) \cup (A - B)$
4. $A \cup (B - A) = A \cup B$

$\surd$ **9.** Mostre, através de um exemplo, que para alguns conjuntos A, B e C, o conjunto $A-(B-C)$ é diferente do conjunto $(A - B) - C$.

$\surd$ **10.** Defina, para dois elementos a e b,

$$\langle a, b \rangle = \{\{a, \emptyset\}, \{b, \{\emptyset\}\}\}$$

Prove que $\langle a, b \rangle = \langle a', b' \rangle$ se e somente se $a = a'$ e $b = b'$.

$\surd$ **11.** Prove que $A \times B = \emptyset$ se e somente se $A = \emptyset$ ou $B = \emptyset$.

$\surd\surd$ **12.** Demonstre ou dê um contra-exemplo para cada dos casos abaixo. Suponha que A, B e C sejam conjuntos.

1. $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$
2. $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$

$\surd\surd$ **13.** Sejam R uma relação binária e A e B conjuntos. Por simplicidade de notação, escrevemos $R[X]$, onde X é um conjunto, para indicar $R[X, X]$. Prove ou construa um contra-exemplo:

1. $R[A \cup B] = R[A] \cup R[B]$.
2. $R[A \cap B] \subseteq R[A] \cap R[B]$.
3. $R[A - B] \subseteq R[A] - R[B]$.
4. $R[A \cap B] = R[A] \cap R[B]$.
5. $R[A] - R[B] = R[A - B]$.