Lista 3 de Probabilidade e Processos Estocásticos

1. Seja (X_n) uma cadeia de Markov tal que, se $X_{n-1} = k$, então $\mathbb{P}(X_n = k+1) = 1/2$ e $\mathbb{P}(X_n = k-1) = 1/2$. Considere que $X_0 = 0$. Sejam $a > b > 0 > c$ inteiros. Note que, se n é ímpar e b é par, ou vice-versa, então $\mathbb{P}(X_n = b) = 0$. Considere então que n e b são ambos pares ou ambos ímpares. Calcule a probabilidade $\mathbb{P}(X_n = b)$ de X_n ser igual a b. Dizemos que a cadeia tocou o eixo $y = a$ antes de n se $X_{n'}$ é maior ou igual a a para algum $0 < n' \leq n$. Calcule a probabilidade de $X_n = b$ e a cadeia tocar o eixo $y = a$ antes de n. Calcule a probabilidade de $X_n = b$ e a cadeia tocar o eixo $y = a$ e, após o primeiro toque no eixo $y = a$, não tocar o eixo $y = c$ (a cadeia pode tocar o eixo $y = c$ antes do primeiro toque no eixo $y = a$). **Dica:** Reflexão.

2. Seja $0 < p < 1$ um real fixo. Sejam $X_1, X_2, X_3 \ldots$ variáveis aleatórias independentes tais que $X_n \sim Binomial(n, p)$. Mostre que as seguintes afirmações ocorrem com probabilidade 1

(a) Um número infinito dos X_n assume valor exatamente igual a np.

(b) Somente um número finito dos X_n assume valor menor ou igual a $np/2$.

3. O mundo tem hoje em dia 7,5 bilhões de pessoas. A distribuição populacional entre os continentes é a seguinte: Ásia 57%, África 17%, Ámerica 14%, Europa 11% e Oceania 1%. Faz-se um sorteio aleatório e uniforme de uma pessoa do mundo. Justifique as respostas.

(a) Qual a esperança e desvio padrão do número de pessoas da América selecionadas em 1000 sorteios **com reposição**?

(b) Qual a esperança e desvio padrão do número de pessoas da América selecionadas em 1000 sorteios **sem reposição**?

(c) Qual o valor esperado de sorteios **com reposição** até se obter alguém da Oceania?

(d) Qual o valor esperado de sorteios **com reposição** até se obter 100 pessoas da Oceania?

(e) Qual o valor esperado de sorteios **sem reposição** até se obter alguém da Oceania?

(f) Qual o valor esperado de sorteios **sem reposição** até se obter 100 pessoas da Oceania?

4. Suponha que uma moeda não viciada é lançada N vezes. Um *grupo* é uma sequência de lançamentos consecutivos com mesmo valor. Por exemplo, se os lançamentos foram CCCKCCCKKKKKC, temos os seguintes 5 grupos: CCC, K, CCC, KKKKK, C. Qual a **esperança** do número de grupos? Qual o **desvio padrão** do número de grupos?

5. O número X de partículas radioativas emitidas por um reator segue uma distribuição de Poisson com taxa λ. Cada partícula pode ser do tipo α ou do tipo β ou do tipo γ. A probabilidade de uma partícula ser do tipo α é p_1, de ser do tipo β é p_2 e de ser do tipo γ é p_3, de modo que $p_1 + p_2 + p_3 = 1$. Denote por Y o número de partículas do tipo α, por Z o número de partículas do tipo β e por W o número de partículas do tipo γ, de modo que $X = Y + Z + W$.

(a) Encontre a distribuição de Y, de Z e de W.

(b) Mostre que Y e Z são independentes.

6. Seja $\{X_n,\ n \geq 0\}$ uma cadeia de Markov com estados $1, 2, 3, 4, 5, 6$ dada pela matriz P abaixo, onde $P_{i,j}$ (linha i e coluna j) é a probabilidade de ir do estado i para o estado j. Seja $X'_n = \min\{X_n, 4\}$ e seja $X''_n = \max\{X_n, 3\}$. A sequência $\{X'_n,\ n \geq 0\}$ é uma cadeia de Markov? A sequência $\{X''_n,\ n \geq 0\}$ é uma cadeia de Markov? Justifique.

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 2/5 & 1/2 & 1/10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3/4 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 4/5 & 0 & 0 & 1/5 & 0 \end{bmatrix}$$

7. Sobre a cadeia da questão anterior, responda:

(a) Seja E_i o evento de, iniciando no estado i, a cadeia de Markov retornar ao estado i em algum momento futuro. Quem é mais provável? E_2 ou E_5? E_2 ou E_3?

(b) Iniciando no estado 6, qual o número esperado de vezes que o processo entrará nesse estado?