Lista 1 de Probabilidade e Processos Estocásticos

1. Considere o problema de calcular a probabilidade do aniversário de uma pessoa ser em uma determinada data. Defina o espaço amostral e a função de probabilidade para os seguintes casos: (a) Ignorando o dia 29 de fevereiro, e (b) Considerando o dia 29 de fevereiro e considerando que ele ocorre de 4 em 4 anos. Considerando o item (b), qual a probabilidade de duas pessoas escolhidas ao acaso terem o mesmo dia de aniversário?

2. Em uma população com N elementos, existem $M \leq N$ que são especiais. Um experimento é feito tomando uma amostra com n elementos distintos dessa população. Seja X a variável aleatória que mede a diferença entre o número de elementos especiais e o número de elementos comuns. Calcule a esperança e a variância de X. Quanto são esses valores para o caso em que $M = N/2$?

3. Suponha que uma moeda não viciada é lançada N vezes. Um *grupo* é uma sequência de lançamentos consecutivos com mesmo valor. Por exemplo, se os lançamentos foram CCCKCCCKKKKKC, temos os seguintes 5 grupos: CCC, K, CCC, KKKKK, C. Qual o número esperado de grupos? Qual o número esperado de grupos de tamanho 1?

4. Sabendo que $E[(X-1)^2] = a > 0$ e que $E[(X-2)^2] = b > 0$, calcule esperança e variância de X em função de a e b.

5. Prove que

$$(x_1 + x_2 + x_3)^n = \sum \frac{n!}{\alpha_1!\alpha_2!\alpha_3!} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3}$$

onde o somatório acima é sobre todas as triplas $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ de números naturais tais que $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = n$.

6. Uma urna contém b bolas brancas e a bolas azuis. As bolas são retiradas ao acaso e sem reposição. Justifique.

(a) Calcule a probabilidade que a primeira bola azul seja retirada na $(k+1)$-ésima vez.

(b) Encontre a probabilidade (incondicional) de que a última bola retirada seja azul.

(c) Encontre a probabilidade de que a última, a penúltima e a antepenúltima sejam azuis.

7. O mundo tem hoje em dia 7,5 bilhões de pessoas. A distribuição populacional entre os continentes é a seguinte: Ásia 57%, África 17%, Ámerica 14%, Europa 11% e Oceania 1%. Faz-se um sorteio aleatório e uniforme de uma pessoa do mundo. Justifique as respostas.

(a) Qual a esperança e desvio padrão do número de pessoas da América selecionadas em 1000 sorteios **com reposição**?

(b) Qual a esperança e desvio padrão do número de pessoas da América selecionadas em 1000 sorteios **sem reposição**?

(c) Qual o valor esperado de sorteios **com reposição** até se obter alguém da Oceania?

(d) Qual o valor esperado de sorteios **com reposição** até se obter 100 pessoas da Oceania?

8. Considerando ainda a questão anterior, responda os itens abaixo e justifique mostrando as contas:

(a) Qual o valor esperado de sorteios **sem reposição** até se obter alguém da Oceania?

(b) Qual o valor esperado de sorteios **sem reposição** até se obter 100 pessoas da Oceania?

9. O número X de partículas radioativas emitidas por um reator segue uma distribuição de Poisson com taxa λ. Cada partícula pode ser do tipo α ou do tipo β. A probabilidade de uma partícula ser do tipo α é p. Denote por Y o número de partículas do tipo α e por Z o número de partículas do tipo β, de modo que $X = Y + Z$.

(a) Encontre a distribuição de Y e de Z.

(b) Mostre que Y e Z são independentes.

Dica 1:

$$X \sim Poisson(\lambda) \quad \Longrightarrow \quad \mathbb{P}(X = n) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}.$$

Dica 2: Fórmula de Taylor:

$$\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!} = e^x.$$