Lista 2 de Probabilidade e Processos Estocásticos

1. Seja $\{X_n,\ n \geq 0\}$ uma cadeia de Markov com estados $1, 2, 3$ dado pela matriz P abaixo, onde $P_{i,j}$ (linha i e coluna j) é a probabilidade de ir do estado i para o estado j. Seja f uma função tal que $f(1) = 1$ e $f(2) = f(3) = 2$. A sequência $\{f(X_n),\ n \geq 0\}$ é uma cadeia de Markov? Justifique.

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2. Considere a seguinte matriz P e responda:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 2/5 & 1/2 & 1.01/10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3/4 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

(a) Esta matriz representa uma Cadeia de Markov? Justifique. Se não representar, altere-a levemente para que represente.

(b) Seja E_i o evento de, iniciando no estado i, a cadeia de Markov retornar ao estado i em algum momento futuro. Quem é mais provável? E_2 ou E_5? E_2 ou E_3?

(c) Iniciando no estado 6, qual o número esperado de vezes que o processo entrará nesse estado?

3. Prove que, se o estado i de uma cadeia de Markov é recorrente e não se comunica com o estado j, então $P_{i,j} = 0$.

4. Uma partícula se movimenta entre $n + 1$ estados que estão situados em um círculo. A cada passo, a partícula se move no sentido horário com probabilidade p ou no sentido anti-horário com probabilidade $1 - p$. Iniciando em um estado qualquer, calcule a probabilidade de, antes do primeiro retorno àquele estado, a partícula ter visitado todos os outros estados.

5. Um homem possui n guarda-chuvas que ele usa para ir da casa ppara o trabalho e vice-versa. Se chove no início do dia, ele leva um guarda-chuva da casa para o trabalho (se em casa tiver um). Se chover no fim do dia, ele leva um guarda-chuva do trablho para casa (se no trabalho tiver um). Considerando que a probabilidade de chover é p (seja de manhã ou de noite), qual a probabilidade dele se molhar? Ou seja, qual a fração das viagens ele estará sem guarda-chuva?

6. Considerando que o cavalo do jogo de xadrez inicia num canto do tabuleiro (8 x 8) e realiza um movimento possível com probabilidade uniforme, calcule o número esperado de movimentos até retornar ao canto inicial.