Lista 1C de Probabilidade e Processos Estocásticos

1. Suponha que uma moeda viciada (com probabilidade p de ser cara) é lançada N vezes. Um *grupo* é uma sequência de lançamentos consecutivos com mesmo valor. Por exemplo, se os lançamentos foram CCCKCCCKKKKKC, temos os seguintes 5 grupos: CCC, K, CCC, KKKKK, C. Qual o número esperado de grupos de tamanho 3?

2. Sejam a, b, c fixados com $a > c > 0$ e $b > 0$. Calcule o número de caminhos que tocam o eixo $y = a$ e então seguem para o ponto (n, c) sem tocar o eixo $y = -b$ (pode incluir os caminhos que tocam o eixo $y = -b$ antes de tocarem o eixo $y = a$). Dica: use o princípio da reflexão duas vezes.

3. Uma urna contém b bolas brancas e a bolas azuis. As bolas são retiradas ao acaso e sem reposição.

(a) Calcule a probabilidade que a terceira bola azul seja retirada na $(k+1)$-ésima vez.

(b) Encontre a probabilidade que a primeira, a última e a $(k+1)$-ésima bolas retiradas sejam azuis.

4. O número X de partículas radioativas emitidas por um reator segue uma distribuição de Poisson com taxa λ. Cada partícula é classificada como sendo do tipo α, β ou γ, com probabilidades p_1, p_2 e p_3, respectivamente, onde $p_1+p_2+p_3 = 1$. Denote por Y, Z, W o número de partículas dos tipos α, β, γ, respectivamente, de modo que $X = Y + Z + W$.

(a) Encontre a distribuição de Y, de Z e de W.

(b) Mostre que Y, Z e W são independentes.

Dica 1:

$$X \sim Poisson(\lambda) \quad \Longrightarrow \quad \mathbb{P}(X = n) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}.$$

Dica 2: Fórmula de Taylor:

$$\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!} \;=\; e^x.$$

5. Sejam $X_1, X_2, X_3 \ldots$ variáveis aleatórias independentes tais que $X_n \sim Binomial(n, 1/2)$. Mostre que as seguintes afirmações ocorrem com probabilidade 1

(a) Um número infinito dos X_n assume valor exatamente igual a $n/2$.

(b) Somente um número finito dos X_n assume valor igual a n/b, para qualquer $b \neq 2$, $b > 1$.

(c) Somente um número finito dos X_n assume valor menor ou igual a $n/3$.

Dica 1: Borel-Cantelli
Dica 2: Fórmula de Stirling:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}} \;=\; 1.$$