Lista 1B de Probabilidade e Processos Estocásticos

1. Sejam a, b, c fixados com $a > c > 0$ e $b > 0$. Calcule o número de caminhos que tocam o eixo $y = a$ e então seguem para o ponto (n, c) ssem tocar o eixo $y = -b$ (pode incluir os caminhos que tocam o eixo $y = -b$ antes de tocarem o eixo $y = a$). Dica: use o princípio da reflexão duas vezes.

2. Uma urna contém b bolas brancas e a bolas azuis. As bolas são retiradas ao acaso e sem reposição.

(a) Calcule a probabilidade que a primeira bola azul seja retirada na $(k+1)$-ésima vez.

(b) Encontre a probabilidade (incondicional) que a última bola retirada seja azul. Dica: calcule a probabilidade de que a segunda bola retirada seja azul, ou a terceira bola seja azul, ...

3. O número X de partículas radioativas emitidas por um reator segue uma distribuição de Poisson com taxa λ. Cada partícula é classificada como sendo do tipo α ou β, com probabilidade p e $1-p$, respectivamente. Denote por Y o número de partículas do tipo α e por Z o número de partículas do tipo β, de modo que $X = Y + Z$.

(a) Encontre a distribuição de Y e de Z.

(b) Mostre que Y e Z são independentes.

Dica 1:

$$X \sim Poisson(\lambda) \quad \Longrightarrow \quad \mathbb{P}(X = n) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}.$$

Dica 2: Fórmula de Taylor:

$$\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!} \;=\; e^x.$$

4. Sejam $X_1, X_2, X_3 \ldots$ variáveis aleatórias independentes tais que $X_n \sim Binomial(n, 1/2)$. Mostre que as seguintes afirmações ocorrem com probabilidade 1

(a) Somente um número finito dos X_n assume valor igual a 0 ou 1.

(b) Um número infinito dos X_n assume valor igual a $n/2$.

Dica 1: Borel-Cantelli
Dica 2: Fórmula de Stirling:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n!}{n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}} \;=\; 1.$$