Lista 1A de Probabilidade e Processos Estocásticos

1. Considere o problema de calcular a probabilidade do aniversário de uma pessoa ser em uma determinada data. Defina o espaço amostral e a função de probabilidade para os seguintes casos:

(a) Ignorando o dia 29 de fevereiro;

(b) Considerando o dia 29 de fevereiro e considerando que ele ocorre de 4 em 4 anos.

2. Em uma seleção de uma empresa, as entrevistas são conduzidas uma a uma até que dois candidatos consecutivos tenham a mesma data de aniversário. Considerando o caso (a) da questão anterior, responda:

- Calcule a probabilidade p_N do processo de seleção necessitar de N ou mais entrevistas;
- Quantas entrevistas deverão ser feitas para que a probabilidade de contratação seja maior que 0.9?

3. Suponha que uma moeda não viciada é lançada N vezes. Um *grupo* é uma sequência de lançamentos consecutivos com mesmo valor. Por exemplo, se os lançamentos foram CCCKCCCKKKKKC, temos os seguintes 5 grupos: CCC, K, CCC, KKKKK, C. Qual o número esperado de grupos? Qual o número esperado de grupos de tamanho 1?

4. Sabendo que $E[(X-1)^2] = a > 0$ e que $E[(X-2)^2] = b > 0$, calcule esperança e variância de X em função de a e b.

5. Seja $\pi = \pi_1\pi_2\ldots\pi_n$ uma permutação aleatória uniforme de $\{1,\ldots,n\}$ (isso significa que todas as permutações são equiprováveis, ou seja, a distribuição é uniforme no espaço amostral de todas as permutações). Um máximo local em uma permutação é um elemento que é maior que seu antecessor (se houver algum) e também maior do que seu sucessor (se houver algum). Por exemplo, a permutação $\pi = 243158769$ tem 3 máximos locais: 4, 8 e 9. Calcule o número esperado de máximo locais na permutação aleatória π.

6. Considere a equação $x + y + z = 50$, onde x, y e z são números naturais. Se selecionarmos aleatória e uniformemente uma solução dessa equação, qual a probabilidade de pelo menos uma das variáveis ser maior do que 34? E qual a probabilidade de pelo menos uma das variáveis ser maior do que 19? E qual a probabilidade de pelo menos uma das variáveis ser maior do que 17?

7. Demonstre as seguintes afirmações:

1. $\binom{n+p+1}{p} = \sum_{r=0}^{p} \binom{n+r}{r}$
2. $\binom{n+p+1}{p+1} = \sum_{r=0}^{n} \binom{p+r}{p}$
3. $\binom{n+2}{p+2} = \binom{n}{p} + 2\binom{n}{p+1} + \binom{n}{p+2}$

8. Determine o coeficiente de x^3 no desenvolvimento de $\left(x^2 + \frac{1}{x^3}\right)^N$, quando $N = 99$ e quando $N = 100$.

9. Prove que

$$(x_1 + x_2 + x_3)^n = \sum \frac{n!}{\alpha_1!\alpha_2!\alpha_3!} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3}$$

onde o somatório acima é sobre todas as triplas $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ de números naturais tais que $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = n$.

10. Use as desigualdades de Markov e/ou Chebyschev para dar uma estimativa da probabilidade de uma variável X atingir 100 vezes a sua média ou se afastar de sua média mais de 10 vezes o seu desvio padrão. Com isso, argumente em que situações uma desigualdade é melhor do que a outra.

11. A distribuição populacional entre os continentes é a seguinte: Ásia 57%, África 17%, Ámerica 14%, Europa 11% e Oceania 1%. Faz-se um sorteio aleatório e uniforme de uma pessoa do mundo. Qual o valor esperado de pessoas da América selecionadas em 1000 sorteios com reposição? E sem reposição? Qual o valor esperado de sorteios com reposição até se obter alguém da Oceania? Qual o valor esperado de sorteios com reposição até se obter 100 pessoas da Oceania? Justifique as respostas associando esses experimentos com as distribuições conhecidas. E as duas últimas perguntas em sorteios sem reposição?