Matemática Discreta (Lista de exercícios 3)

Cada $\surd$ denota um nível de dificuldade: $\surd$ fácil, $\surd\surd$ médio e $\surd\surd\surd$ difícil.

$\surd\surd$ **1.** Para cada conjunto abaixo, dê um argumento para mostrar se o conjunto é finito ou infinito.

1. $A = \{n^7 : n \in \mathbb{N}\}$.
2. $B = \{n^{109} : n \in \mathbb{N}\}$.
3. $A \cup B$.
4. $A \cap B$.

$\surd\surd$ **2.** Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $A \subseteq \{0, 1, \cdots, 2n-1\}$. Mostre que se $|A| = n+2$, então existem $a \in A$ e $a' \in A$, $a \neq a'$, tais que $a + a' = 2n$.

$\surd\surd\surd$ **3.** Sejam $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, e $A \subseteq \mathbb{N}$. Prove cada uma das afirmações a seguir.

1. se $|A| = n+1$, então existem $a \in A$ e $a' \in A$, $a \neq a'$, tais que $a - a'$ é divisível por n.
2. se $|A| = n+2$, então existem $a \in A$ e $a' \in A$, $a \neq a'$, tais que ($a - a'$ é divisível por $2n$) ou ($a + a'$ é divisível por $2n$).

Observe que $a - a'$ é divisível por n se e somente se $a \bmod n = a' \bmod n$, e que $a + a'$ é divisível por n se e somente se $(a \bmod n) + (a' \bmod n) = n$.

$\surd$ **4.** Dado um conjunto A e uma relação simétrica $R \subseteq A \times A$, escrevemos $aa' \in R$ para indicar que $(a, a') \in R \wedge (a', a) \in R$. Um *grafo* é um par $G = (V, E)$, onde V é um conjunto de elementos denominados *vértices*, e $E \subseteq V \times V$ é uma relação simétrica cujos elementos são pares não-ordenados chamados de *arestas*. O grafo G é *conexo* se, para todo par u e v de vértices, existe uma sequência $\langle u = v_1, v_2, \ldots, v_\ell = v\rangle$ de vértices de G tal que $v_i v_{i+1} \in E$, para todo $1 \leq i < \ell$. Mostre, por indução em $|V|$, que se $G = (V, E)$ é um grafo conexo, então $|V| \leq |E| + 1$.

$\surd$ **5.** Mostre que o conjunto de números fracionários é infinito enumerável.

$\surd\surd$ **6.** Mostre que, em todo grupo de $n \geq 2$ pessoas, há duas pessoas com o mesmo número de amigos no grupo. Considere que a relação "ser amigo" é simétrica mas não é reflexiva.

$\surd$ **7.** Seja $n = 2^k$, para algum $k \in \mathbb{N}$. Resolva a seguinte relação de recorrência:

$$\begin{array}{rcl} T(1) & = & 13 \\ T(n) & = & 5T(n/2) + 3n, \quad n > 1 \end{array}$$

$\surd$ **8.** Seja $n = 3^k$, para algum $k \in \mathbb{N}$. Resolva a seguinte relação de recorrência:

$$\begin{array}{rcl} T(1) & = & 29 \\ T(n) & = & 3T(n/3) + 17n, \quad n > 1 \end{array}$$

$\surd$ **9.** Em um grupo de 155 alunos, 84 possuem computador pessoal, 100 possuem endereço eletrônico, 30 possuem página pessoal, 54 têm computador pessoal e endereço eletrônico, 15 têm computador e página pessoais, 8 possuem endereço eletrônico e página pessoal, e 3 alunos têm computador pessoal, endereço eletrônico e página pessoal. Responda as seguintes perguntas usando o Princípio da Inclusão e Exclusão:

1. Quantos alunos têm apenas endereço eletrônico?
2. Quantos alunos não possuem nenhum dos 3 itens?
3. Quantos alunos têm computador e homepage, mas não tem email?

$\surd$ **10.** Quantos números entre 1 e 350.000 não são divísveis por 7, 11, 13, 17 ou 19?

$\surd$ **11.** Se enumerarmos todas as permutações dos algarismos 1, 2, 3, 4 e 5 em ordem crescente, então:

1. que posição ocupa o número 42513?
2. qual número ocupa a posição 73?

$\surd\surd$ **12.** Quantos são os subconjuntos de k elementos de $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ nos quais:

1. a_1 aparece?
2. a_1 não aparece?
3. a_1 e a_2 aparecem?

$\surd\surd$ **13.** Considere todos os subconjuntos com 5 elementos de $\{a_1, a_2, \cdots, a_{12}\}$. Se ordenarmos todos esses subconjuntos por ordem crescente de índices, em quantos subconjuntos o elemento a_8 aparece na posição 3 da sua ordenação?

$\surd\surd$ **14.** Quantas são as soluções de $x + y + z = 50$, sendo x, y e z números naturais?

$\surd\surd$ **15.** Quantas são as soluções de $x + y + z = 120$, sendo x, y e z números naturais, nas quais pelo menos uma incógnita é maior que 27?

$\surd\surd\surd$ **16.** Demonstre as seguintes afirmações:

1. $C_p^{n+p+1} = \sum_{r=0}^{p} C_r^{n+r}$
2. $C_{p+1}^{n+p+1} = \sum_{r=0}^{n} C_p^{p+r}$
3. $C_{p+2}^{n+2} = C_p^n + 2C_{p+1}^n + C_{p+2}^n$

$\surd\surd$ **17.** Determine o coeficiente de x^3 no desenvolvimento de

1. $$\left(x^2 + \frac{1}{x^3}\right)^{99}$$
2. $$\left(x^2 + \frac{1}{x^3}\right)^{100}$$

$\surd\surd\surd$ **18.** Prove que

$$(x_1 + x_2 + x_3)^n = \sum \frac{n!}{\alpha_1!\alpha_2!\alpha_3!} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3}$$

estendendo-se o somatório a todos os números naturais $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ tais que $\sum_{i=1}^{3} \alpha_i = n$.