Universidade Federal do Ceará
Centro de Ciências
Departamento de Computação

Matemática Discreta

Lista de exercícios 2

Cada $\surd$ denota um nível de dificuldade: $\surd$ fácil, $\surd\surd$ médio e $\surd\surd\surd$ difícil.

$\surd\surd$ **1.** Mostre que se R é uma relação reflexiva e transitiva, então $R \cap R^{-1}$ é uma relação de equivalência, onde $R^{-1} = \{(b, a) \mid (a, b) \in R\}$.

$\surd\surd\surd$ **2.** Sejam A um conjunto e $R \subseteq A \times A$. Seja ainda

$$S = \{(a, a') \mid \exists a'' \in A, (a, a'') \in R \wedge (a'', a') \in R\}.$$

Prove ou dê um contra-exemplo:

1. se R é uma relação de equivalência, então S também o é.
2. se S é uma relação de equivalência, então R também o é.

$\surd$ **3.** Sejam A um conjunto e $R \subseteq A \times A$ uma ordem parcial. Mostre que se $B \subseteq A$, então $R \cap (B \times B)$ é uma ordem parcial.

$\surd$ **4.** Dada um função bijetiva qualquer $F : A \to A$ em um conjunto A, qual é a função $F \circ F^{-1}$? Prove.

$\surd$ **5.** Prove usando um contra-exemplo que a seguinte afirmação é falsa: se $f : A \to A$ e $g : A \to A$ são duas funções, então $f \circ g \neq g \circ f$.

$\surd\surd$ **6.** Duas funções F e H são ditas "compatíveis" se $F(x) = H(x)$, para todo $x \in Dom_F \cap Dom_H$. Mostre que duas funções F e H são compatíveis se e somente se $F \cup H$ é uma função.

$\surd\surd$ **7.** Sejam A e B dois conjuntos. Mostre que para quaisquer funções $f : A \to B$, $g : A \to B$ e $h : A \to B$, temos que $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

$\surd$ **8.** Prove por indução que se $k \in \mathbb{N}$ e $k \geq 64$, então existem $a \in \mathbb{N}$ e $b \in \mathbb{N}$ tais que $k = 5a + 17b$.

$\surd$ **9.** Mostre, por indução em k, que se $k \in \mathbb{N}$, então $k(k + 1)(k + 2)$ é divisível por 3.

$\surd\surd\surd$ **10.** Prove por indução que

$$\textbf{(a)} \quad \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\textbf{(b)} \quad \sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$\textbf{(c)} \quad \sum_{k=0}^{n} k^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$$

$\surd\surd$ **11.** Seja $F : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ a função de Fibonacci, tal que $F(0) = 0$, $F(1) = 1$ e $F(n) = F(n-1) + F(n-2)$ para $n \geq 2$. Mostre, por indução em n, que

$$F(n) \;=\; \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}$$

$\surd\surd\surd$ **12.** Considere a seguinte versão do *Princípio da Indução Matemática*:

Seja $A \subseteq \mathbb{N}$ tal que

1. $k \in A$, e
2. se $n \geq k$ e $\{0, 1, 2, \ldots, n\} \subseteq A$, então $n + 1 \in A$.

Então, $A = \mathbb{N}$.

Usando essa versão, mostre que, se $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ é uma potência de 2 ($n = 2^k$, para algum $k \in \mathbb{N}$), e uma função $T : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ é tal que

$$\begin{aligned} T(1) &= 0 \\ T(n) &= T(n/2) + 1, \quad n > 1, \end{aligned}$$

então $T(n) = \log n$ (logaritmo na base 2), para todo n potência de 2.