Universidade Federal do Ceará
Centro de Ciências
Departamento de Computação
Bacharelado em Ciência da Computação

Construção e Análise de Algoritmos

Lista de exercícios 4

1.

(a) Explique informalmente o que significa um problema ser NP-Completo. Do ponto de vista prático, qual é a relevância de se determinar que um certo problema é NP-Completo?

(b) Para cada uma das afirmações abaixo, diga se ela e *verdadeira*, *falsa*, *verdadeira se P≠NP* ou *falsa se P≠NP*. Dê uma justificativa curta para cada resposta.

(1) Não há problemas em P que são NP-Completos
(2) Existe apenas algoritmo exponencial para o problema da parada
(3) Existem problemas em P que estão em NP
(4) Existem problemas em NP que não estão em P
(5) Se A pode ser polinomialmente reduzido a B, e B é NP-Completo, então A é NP-Completo
(6) Se A pode ser polinomialmente reduzido a B, e B $\in$ P, então A $\in$ P
(7) O problema do Caixeiro Viajante é NP-Completo

2. Seja TERÇO-CLIQUE o problema de decidir se, dado como entrada um grafo G, existe uma clique com pelo menos $n/3$ vértices, onde n é o número de vértices de G. Prove que TERÇO-CLIQUE é NP-Completo.

3. Dado um grafo G, uma coloração é uma atribuição de cores a seus vértices de forma que vértices adjacentes tenham cores diferentes. Seja 3CORES o problema de decidir se, dado um grafo G como entrada, G pode ser colorido com 3 cores. Mostre que 3CORES é NP-Completo.

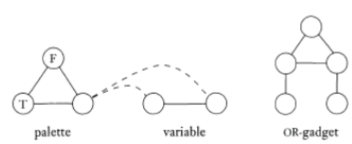

FIGURA 1. Use essas engrenagens na questão 1

4. Dizemos que um grafo G esta parcialmente rotulado se alguns de seus vértices possuem um número inteiro como rótulo. Dado um vértice rotulado v de G, seja $r(v)$ o seu rótulo. Seja CAMPO-MINADO o problema de decidir se, dado como entrada um grafo G parcialmente rotulado, G pode ser completamente rotulado de forma que qualquer vértice v com rótulo positivo tenha exatamete $r(v)$ vizinhos com rótulo negativo. Prove que CAMPO-MINADO é NP-Completo. Dica: Imagine rótulos negativos como bombas do campo minado. Tente reduzir 3SAT para este problema: cada variável tendo dois vértices no grafo com um vizinho comum com rótulo igual a 1. Pense nas bombas do campo minado como uma atribuição de Verdadeiro.

5. Considere os seguintes problemas de decisão: MAX3SAT ("*Dada uma fórmula 3CNF e um inteiro k, existe uma atribuição de valores às variáveis que satisfaz pelo menos k cláusulas?*"), SUBGR-DENSO ("*Dado um grafo G e dois inteiros k e m, existe em G um subgrafo com k vértices e m arestas?*"), MAX-PATH ("*Dado um número k e um grafo G, existe um caminho em G com k vértices?*"). Prove que esses problemas são NP-Completos.

6. No seguinte jogo de paciência, é dado um tabuleiro $n \times n$. Em cada uma das suas n^2 posições está colocada uma pedra azul ou uma pedra vermelha ou nenhuma pedra. Você joga removendo pedras do tabuleiro até que cada coluna contenha pedras de uma única cor e cada linha contenha pelo menos uma pedra. Você vence se atingir esse objetivo. Vencer pode ser possível ou não, dependendo da configuração inicial. Seja PACIÊNCIA o problema de decidir se dado um tabuleiro dessa forma como entrada é possível vencer. Prove que PACIÊNCIA é NP-Completo. Dica: Tente reduzir 3SAT para este problema: pense as colunas como variáveis e as linhas como cláusulas. Depois adicione algumas linhas e colunas inóquas para que o tabuleiro fique quadrado.

7. Seja DOMINANTE o problema de decidir se, dado como entrada um grafo G e um inteiro $k > 0$, existe um conjunto D com k vértices de G tal que todo vértice de G está em D ou é adjacente a algum vértice de D.

- Prove que DOMINANTE é NP-Completo usando o problema 3SAT
- Prove que DOMINANTE é NP-Completo usando o problema COB-VERT da Cobertura de vértices.

8. Seja COR-DIF o problema de decidir se, dado como entrada um conjunto S e uma coleção $C = \{C_1, \ldots, C_k\}$ de subconjuntos de S, onde $k > 0$, é possivel colorir os elementos de S com duas cores de forma que nenhum conjunto C_i tenha todos os seus elementos com a mesma cor. Prove que COR-DIF é NP-Completo. **Dica:** Tente reduzir 3SAT para este problema: Crie um conjunto S contendo toda variável e seu complemento. Adicione um elemento especial F a S. Para cada variável, crie um subconjunto C_i contendo apenas ela e seu complemento. Para cada cláusula, crie um subconjunto C_j contendo seus literais e mais o elemento especial F.

9. Seja MOCHILA o problema de decidir se, dados inteiros positivos P e V e dado um conjunto S onde cada elemento $s \in S$ possui um peso $p(s)$ e um valor $v(s)$, existe um subconjunto S' de S tal que a soma dos pesos dos elementos de S' seja menor ou igual a P e a soma dos valores dos elementos de S' seja maior ou igual a V. Prove que MOCHILA é NP-Completo. **Dica:** Problema SOMA-SUBC (ou SUBSET-SUM) da soma de subconjuntos.

10. Seja HITTING-SET o problema de decidir se, dado como entrada um inteiro K e uma coleção de subconjuntos $C_1, \ldots, C_m$ de um conjunto S, existe um subconjunto S^* com K elementos de S tal que, para todo subconjunto C_i, C_i contém algum elemento de S^*. Prove que HITTING-SET é NP-Completo. **Dica:** Cobertura de vértices.

11. Mostre que é possivel provar que o problema SUBGR-ISOMORFO definido abaixo é NP-Completo usando tanto o problema CLIQUE como o problema CAMINHO-HAMILT. Seja SUBGR-ISOMORFO o problema de decidir se, dado como entrada dois grafos G e H, o grafo G possui um subgrafo isomorfo ao grafo H.

$\surd\surd\surd$ **12.** Seja 3DM (ou 3-DIMENSIONAL MATCHING) o problema de decidir se, dados como entrada três conjuntos A, B e C e um conjunto $M \subseteq A \times B \times C$ de triplas (a, b, c), onde $a \in A$, $b \in B$ e $c \in C$, existe um subconjunto M' de M tal que todo elemento $x \in A \cup B \cup C$ aparece em exatamente uma tripla de M'. Prove que 3DM é NP-Completo.