

Universidade Federal do Ceará  
Centro de Ciências  
Departamento de Computação

**Matemática Discreta**  
**Lista de exercícios 5**

Cada  $\surd$  denota um nível de dificuldade:  $\surd$  fácil,  $\surd\surd$  médio e  $\surd\surd\surd$  difícil.

$\surd$  1. Seja  $n = 2^k$ , para algum  $k \in \mathbb{N}$ . Resolva a seguinte relação de recorrência:

$$\begin{aligned}T(1) &= 13 \\T(n) &= 5T(n/2) + 3n, \quad n > 1\end{aligned}$$

$\surd$  2. Seja  $n = 3^k$ , para algum  $k \in \mathbb{N}$ . Resolva a seguinte relação de recorrência:

$$\begin{aligned}T(1) &= 29 \\T(n) &= 3T(n/3) + 17n, \quad n > 1\end{aligned}$$

$\surd$  3. Em um grupo de 155 alunos, 84 possuem computador pessoal, 100 possuem endereço eletrônico, 30 possuem página pessoal, 54 têm computador pessoal e endereço eletrônico, 15 têm computador e página pessoais, 8 possuem endereço eletrônico e página pessoal, e 3 alunos têm computador pessoal, endereço eletrônico e página pessoal. Responda as seguintes perguntas usando o Princípio da Inclusão e Exclusão:

1. Quantos alunos têm apenas endereço eletrônico?
2. Quantos alunos não possuem nenhum dos 3 itens?
3. Quantos alunos têm computador e homepage, mas não tem email?

$\surd$  4. Quantos números entre 1 e 350.000 não são divisíveis por 7, 11, 13, 17 ou 19?

$\surd$  5. Se enumerarmos todas as permutações dos algarismos 1, 2, 3, 4 e 5 em ordem crescente, então:

1. que posição ocupa o número 42513?
2. qual número ocupa a posição 73?

$\surd\surd$  6. Quantos são os subconjuntos de  $k$  elementos de  $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  nos quais:

1.  $a_1$  aparece?
2.  $a_1$  não aparece?
3.  $a_1$  e  $a_2$  aparecem?

$\surd\surd$  7. Considere todos os subconjuntos com 5 elementos de  $\{a_1, a_2, \dots, a_{12}\}$ . Se ordenarmos todos esses subconjuntos por ordem crescente de índices, em quantos subconjuntos o elemento  $a_8$  aparece na posição 3 da sua ordenação?

√√ 8. Quantas são as soluções de  $x + y + z = 50$ , sendo  $x, y$  e  $z$  números naturais?

√√ 9. Quantas são as soluções de  $x + y + z = 120$ , sendo  $x, y$  e  $z$  números naturais, nas quais pelo menos uma incógnita é maior que 27?

√√√ 10. Demonstre as seguintes afirmações:

1.  $C_p^{n+p+1} = \sum_{r=0}^p C_r^{n+r}$
2.  $C_{p+1}^{n+p+1} = \sum_{r=0}^n C_p^{p+r}$
3.  $C_{p+2}^{n+2} = C_p^n + 2C_{p+1}^n + C_{p+2}^n$

√√ 11. Determine o coeficiente de  $x^3$  no desenvolvimento de

1.

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^3}\right)^{99}$$

2.

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^3}\right)^{100}$$

√√√ 12. Prove que

$$(x_1 + x_2 + x_3)^n = \sum \frac{n!}{\alpha_1! \alpha_2! \alpha_3!} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3}$$

estendendo-se o somatório a todos os números naturais  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  tais que  $\sum_{i=1}^3 \alpha_i = n$ .