Universidade Federal do Ceará
Centro de Ciências
Departamento de Computação

Matemática Discreta
Lista de exercícios 4

Cada $\surd$ denota um nível de dificuldade: $\surd$ fácil, $\surd\surd$ médio e $\surd\surd\surd$ difícil.

$\surd\surd\surd$ **1.** Considere a seguinte versão do *Princípio da Indução Matemática*:

> Seja $A \subseteq \mathbb{N}$ tal que
>
> 1. $k \in A$, e
> 2. se $n \geq k$ e $\{0, 1, 2, \ldots, n\} \subseteq A$, então $n + 1 \in A$.
>
> Então, $A = \mathbb{N}$.

Usando essa versão, mostre que se $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ é uma potência de 2 ($n = 2^k$, para algum $k \in \mathbb{N}$), e uma função $T : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ é tal que

$$\begin{array}{rcl} T(1) & = & 0 \\ T(n) & = & T(n/2) + 1, \quad n > 1, \end{array}$$

então $T(n) = \log n$ (logaritmo na base 2), para todo n potência de 2.

$\surd\surd$ **2.** Para cada conjunto abaixo, dê um argumento para mostrar se o conjunto é finito ou infinito.

1. $A = \{n^7 : n \in \mathbb{N}\}$.
2. $B = \{n^{109} : n \in \mathbb{N}\}$.
3. $A \cup B$.
4. $A \cap B$.

$\surd\surd$ **3.** Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $A \subseteq \{0, 1, \cdots, 2n - 1\}$. Mostre que se $|A| = n + 2$, então existem $a \in A$ e $a' \in A$, $a \neq a'$, tais que $a + a' = 2n$.

$\surd\surd\surd$ **4.** Sejam $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, e $A \subseteq \mathbb{N}$. Prove cada uma das afirmações a seguir.

1. se $|A| = n + 1$, então existem $a \in A$ e $a' \in A$, $a \neq a'$, tais que $a - a'$ é divisível por n.
2. se $|A| = n + 2$, então existem $a \in A$ e $a' \in A$, $a \neq a'$, tais que ($a - a'$ é divisível por $2n$) ou ($a + a'$ é divisível por $2n$).

Observe que $a - a'$ é divisível por n se e somente se $a \bmod n = a' \bmod n$, e que $a + a'$ é divisível por n se e somente se $(a \bmod n) + (a' \bmod n) = n$.

$\surd$ **5.** Para todo conjunto A e $R \subseteq A \times A$ uma relação simétrica, considere a notação aa' para o par *não-ordenado* formado pelos elementos $a \in A$ e $a' \in A$. Escrevemos $aa' \in R$ para indicar que $(a, a') \in R \wedge (a', a) \in R$. Um *grafo*, denotado por $G = (V, E)$, onde V é um conjunto e seus elementos são denominados *vértices*, e $E \subseteq V \times V$ é uma relação simétrica cujos elementos são pares não-ordenados chamados de *arestas*. O grafo G é *conexo* se, para todo par u e v de vértices, existe uma sequência $\langle u = v_1, v_2, \ldots, v_\ell = v \rangle$ de vértices de G tal que $v_i v_{i+1} \in E$, para todo $i \in \{1, 2, \ldots, \ell - 1\}$. Mostre, por indução em $|V|$, que se $G = (V, E)$ é um grafo conexo, então $|V| \leq |E| + 1$.

$\surd$ **6.** Mostre que o conjunto de números fracionários é infinito enumerável.

$\surd\surd$ **7.** Mostre que, em todo grupo de $n \geq 2$ pessoas, há duas pessoas com o mesmo número de amigos no grupo. Considere que a relação "ser amigo" é simétrica mas não é reflexiva.