Universidade Federal do Ceará
Centro de Ciências
Departamento de Computação

Matemática Discreta

Lista de exercícios 3

Cada $\surd$ denota um nível de dificuldade: $\surd$ fácil, $\surd\surd$ médio e $\surd\surd\surd$ difícil.

$\surd$ **1.** Dada um função bijetiva qualquer $F : A \to A$ em um conjunto A, qual é a função $F \circ F^{-1}$? Prove.

$\surd$ **2.** Prove usando um contra-exemplo que a seguinte afirmação é falsa: se $f : A \to A$ e $g : A \to A$ são duas funções, então $f \circ g \neq g \circ f$.

$\surd\surd$ **3.** Duas funções F e H são ditas "compatíveis" se $F(x) = H(x)$, para todo $x \in Dom_F \cap Dom_H$. Mostre que duas funções F e H são compatíveis se e somente se $F \cup H$ é uma função.

$\surd\surd$ **4.** Sejam A e B dois conjuntos. Mostre que para quaisquer funções $f : A \to B$, $g : A \to B$ e $h : A \to B$, temos que $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

$\surd$ **5.** Demonstre que, se $n \in \mathbb{N}$, então não existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $n < m < n^+$. Relembre que a relação $< \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, é tal que $n < m$ se e somente se $n \in m$.

$\surd\surd$ **6.** Use o resultado da questão 5 para mostrar que, para $m, n \in \mathbb{N}$, se $m < n$, então $m^+ \leq n$.

$\surd\surd$ **7.** Defina formalmente o conjunto $\mathbb{I}$ dos números ímpares maiores que 2 (tome como exemplo a definição do conjunto $\mathbb{N}$ dos naturais). Prove que $\mathbb{I}$ e $\mathbb{N}$ são idempotentes, apesar de $\mathbb{I} \subset \mathbb{N}$. Prove que tal fenômeno não ocorre entre conjuntos finitos ($A \subset B$ e A idempotente a B).

$\surd$ **8.** Prove por indução que se $k \in \mathbb{N}$ e $k \geq 64$, então existem $a \in \mathbb{N}$ e $b \in \mathbb{N}$ tais que $k = 5a + 17b$.

$\surd$ **9.** Mostre, por indução em k, que se $k \in \mathbb{N}$, então $k(k+1)(k+2)$ é divisível por 3.

$\surd\surd\surd$ **10.** Prove por indução que

(a) $$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

(b) $$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

(c) $$\sum_{k=0}^{n} k^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$$

$\surd\surd$ **11.** Seja $F : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ a função de Fibonacci, tal que $F(0) = 0$, $F(1) = 1$ e $F(n) = F(n-1) + F(n-2)$ para $n \geq 2$. Mostre, por indução em n, que

$$F(n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right\}$$