Universidade Federal do Ceará
Centro de Ciências
Departamento de Computação

Matemática Discreta

Lista de exercícios 2

Cada $\surd$ denota um nível de dificuldade: $\surd$ fácil, $\surd\surd$ médio e $\surd\surd\surd$ difícil.

$\surd\surd$ **1.** Demonsstre que as seguintes sentenças são **V** para quaisquer conjuntos A, B e C:

1. $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B)$
2. $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$. Em que condições esses conjuntos são iguais ?
3. $A = (A \cap B) \cup (A - B)$ e $A \cup (B - A) = A \cup B$
4. $A \cap (B \oplus C) = (A \cap B) \oplus (A \cap C)$.
5. $A \oplus (B \oplus C) = (A \oplus B) \oplus C)$.

$\surd$ **2.** Mostre, através de um exemplo, que para alguns conjuntos A, B e C, o conjunto $A-(B-C)$ é diferente do conjunto $(A - B) - C$.

$\surd$ **3.** Defina, para dois elementos a e b,

$$\langle a, b\rangle = \{\{a, \emptyset\}, \{b, \{\emptyset\}\}\}$$

Prove que $\langle a, b\rangle = \langle a', b'\rangle$ se e somente se $a = a'$ e $b = b'$.

$\surd$ **4.** Prove que $A \times B = \emptyset$ se e somente se $A = \emptyset$ ou $B = \emptyset$.

$\surd\surd$ **5.** Demonstre ou dê um contra-exemplo para cada dos casos abaixo. Suponha que A, B e C sejam conjuntos.

1. $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$
2. $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$

$\surd\surd$ **6.** Sejam R uma relação binária e A e B conjuntos. Por simplicidade de notação, escrevemos $R[X]$, onde X é um conjunto, para indicar $R[X, X]$. Prove ou construa um contra-exemplo:

1. $R[A \cup B] = R[A] \cup R[B]$.
2. $R[A \cap B] \subseteq R[A] \cap R[B]$.
3. $R[A] - R[B] \subseteq R[A - B]$.
4. $R[A \cap B] = R[A] \cap R[B]$.
5. $R[A] - R[B] = R[A - B]$.

$\surd\surd$ **7.** Mostre que se R é uma relação reflexiva e transitiva, então $R \cap R^{-1}$ é uma relação de equivalência, onde $R^{-1} = \{(b, a) \mid (a, b) \in R\}$.

$\surd\surd\surd$ **8.** Sejam A um conjunto e $R \subseteq A \times A$. Seja ainda

$$S = \{(a, a') \mid \exists a'' \in A, (a, a'') \in R \wedge (a'', a') \in R\}.$$

Prove ou dê um contra-exemplo:

1. se R é uma relação de equivalência, então S também o é.
2. se S é uma relação de equivalência, então R também o é.

$\surd$ **9.** Sejam A um conjunto e $R \subseteq A \times A$ uma ordem parcial. Mostre que se $B \subseteq A$, então $R \cap (B \times B)$ é uma ordem parcial.