MO405/MC878 - Teoria e Aplicações de Grafos
Lista de Exercícios 1

Os exercícios sem marcas são (ou deveriam ser) relativamente simples. Os exercícios marcados com (*) exigem alguma reflexão.... Os exercícios marcados com (**) são mais difíceis. Exercícios marcados com (*) ou (**) podem ser cobrados em um teste.

Lembre-se que $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. Este é também o número de subconjuntos de tamanho k de um conjunto de tamanho n.

1. Seja $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ ($n \geq 1$). Qual é o número de grafos simples com conjunto de vértices igual a V?

2. Prove sem fazer contas que
$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

3. Use fatos sobre grafos completos e argumentos de contagem (**não** faça contas!) para mostrar que

   (a) $\binom{n}{2} = \binom{k}{2} + k(n-k) + \binom{n-k}{2}$ para $0 \leq k \leq n$.

   (b) Se $\sum_{i=1}^{t} n_i = n$, então $\sum_{i=1}^{t} \binom{n_i}{2} \leq \binom{n}{2}$.

4. Mostre que existem onze grafos simples não-isomorfos entre si com exatamente quatro vértices.

5. Mostre que $G \cong H$ se e somente se $\bar{G} \cong \bar{H}$.

6. O grafo de Petersen é definido da seguinte forma. Seja $X := \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e seja $\binom{X}{2}$ a coleção formada por todos os subconjuntos de X com exatamente 2 elementos. O grafo de Petersen tem como conjunto de vértices $V = \binom{X}{2}$ e dois elementos u e v de V são adjacentes se $u \cap v = \emptyset$. Desenhe o grafo de Petersen. Quantos vértices e arestas ele possui?

7. Um grafo G é *auto-complementar* se $G \cong \bar{G}$.

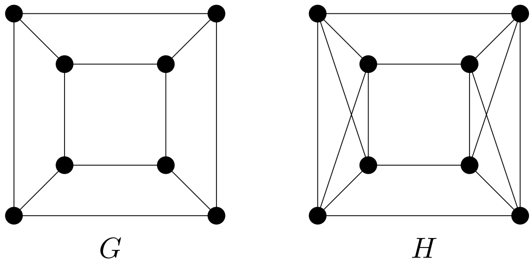
   (a) Dê três exemplos de grafos auto-complementares.

   (b) Prove que se G é auto-complementar, então G possui $4k$ ou $4k+1$ vértices, para algum inteiro $k \geq 0$.

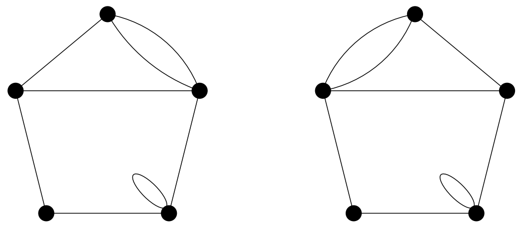
8. Considere um tabuleiro de xadrez (ou Damas se preferir) no qual removemos duas casas diagonalmente opostas. Suponha que você tem uma coleção de pedras de dominós tal que cada pedra destas é capaz de cobrir exatamente 2 casas do tabuleiro. Mostre que no tabuleiro com os cantos removidos não é possível cobrir todas as casas usando as pedras de dominós.

9. Considere uma festa com 6 pessoas. Prove que é sempre possível encontrar três pessoas que se conhecem mutuamente, ou três pessoas que não se conhecem mutuamente. Formule o exercício em termos de grafos e resolva-o.

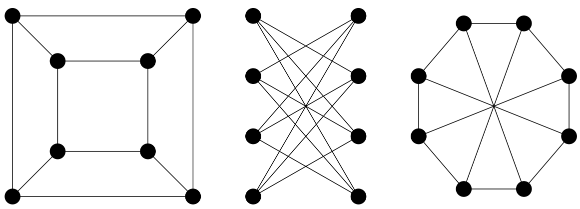
10. Mostre que o grafo G da figura abaixo é isomorfo ao complemento $\bar{H}$ de H.



11. Mostre que os seguintes grafos **não** são isomorfos.



12. Determine quais pares de grafos abaixo são isomorfos.



13. Quantas arestas um grafo bipartido *simples* com n vértices pode ter no máximo?

14. (*) Seja S um conjunto com n elementos. Seja m um inteiro tal que $0 \leq m \leq n$. O grafo de Kneser, denotado por $N_{m,n}$, tem como conjunto de vértices todos os subconjuntos com exatamente m elementos de S e dois vértices são adjacentes em $N_{m,n}$ se são disjuntos (isto é, não tem elementos em comum).

    (a) Desenhe os grafos $N_{m,n}$ para $1 \leq m \leq 2$ e $2 \leq n \leq 5$.

    (b) Qual é o grafo famoso que é isomorfo a $N_{2,5}$?

    (c) Determine o número de vértices e arestas de $N_{m,n}$.

15. (*) O grafo *multipartido completo* $K_{p_1,\ldots,p_s}$ consiste de s conjuntos disjuntos de vértices com tamanho p_i, $1 \leq i \leq s$, sendo que dois vértices são adjacentes se pertencem a conjuntos distintos.

    (a) Qual é o número de vértices de $K_{p_1,\ldots,p_s}$?

    (b) Qual é o número de arestas de $K_{p_1,\ldots,p_s}$?

    (c) Como é o complemento de $K_{p_1,\ldots,p_s}$?

16. (*) Seja $k > 0$ um inteiro. O *k-cubo* Q_k é o grafo cujos vértices são as k-uplas ordenadas de 0's e 1's e tal que dois vértices são adjacentes em Q_k se diferem em exatamente uma coordenada.

    (a) Desenhe Q_1, Q_2, Q_3 e Q_4.

    (b) Q_k é bipartido?

    (c) Mostre como construir recursivamente um k-cubo, isto é, como obter Q_k a partir de Q_{k-1}.

    (d) Q_K é regular?

    (e) Qual é o número de vértices e arestas de Q_k?

17. (*) Exiba um grafo bipartido simples que não é isomorfo a nenhum subgrafo de um k-cubo. Justifique sua resposta.

18. (*) O *grafo-linha* de um grafo G é o grafo $L(G)$ com $V(L(G)) = E(G)$ (se você achar mais claro, pense que cada vértice de $L(G)$ corresponde a uma aresta de G) no qual e, f (ou seja, os vértices correspondentes a e, f) são adjacentes em $L(G)$ se (e e f) têm uma ponta em comum em G.

    (a) Seja G um grafo simples. Determine o número de vértices e arestas de $L(G)$.

    (b) O grafo-linha do K_5 é o complemento de qual grafo?

    (c) O grafo $K_{1,3}$ (também conhecido como *claw* ou *pé-de-galinha*) é o grafo-linha de algum grafo simples? Justifique sua resposta.

19. (*) Seja G um grafo com cintura 5[1]. Prove que se todo vértice de G tem grau pelo menos k, então G possui pelo menos $k^2 + 1$ vértices. Para $k = 2$ e $k = 3$, encontre um tal grafo com exatamente k^2+1 vértices. **Sugestão:** considere a vizinhança $N(v)$ de um vértice v (o conjunto dos vizinhos de v).

20. (**) Considere um grupo X com pelo menos 4 turistas. Sabe-se que em qualquer subgrupo de X com 4 turistas sempre existe um turista que conhece os outros três. Prove que existe um turista em X que conhece *todos* os outros turistas. Formule o exercício em termos de grafos e resolva-o. **Sugestão:** tente descobrir como é o complemento desse "grafo" (que grafo??); ele pode ter muitas arestas?

[1] A cintura de um grafo é o menor dos comprimentos dos circuitos do grafo. Se o grafo não possuir circuito, dizemos que a cintura é infinita.