

Construção e Análise de Algoritmos  
Lista de exercícios 1

1. Uma pessoa sobe uma escada composta de  $n$  degraus, com passos que podem alcançar entre 1 e  $k \leq n$  degraus. Escrever equações de recorrência que permitem determinar o número de modos distintos da pessoa subir a escada.
2. Prove as seguintes afirmações sobre notação assintótica:
  - $n^3/100 - 25n^2 - 100n + 7$  é  $\Omega(n^2)$  e  $\Theta(n^3)$
  - $77n^3 - 13n^2 + 29n - 5$  é  $O(n^4)$  e  $\Omega(n^3)$
  - $34n \log_7 n^2 + 13n$  é  $\Omega(n)$  e  $O(n^2)$
3. Resolva as seguintes equações de recorrência segundo o método da árvore de recursão:
  - $T(n) = T(n-1) + 2$
  - $T(n) = 2 \cdot T(n-1) + 1$
  - $T(n) = 2 \cdot T(n/3) + 1$
  - $T(n) = 5 \cdot T(n/4) + n$
  - $T(n) = 7 \cdot T(n/7) + n$
  - $T(n) = 9 \cdot T(n/3) + n^2$
  - $T(n) = 8 \cdot T(n/2) + n^3$
  - $T(n) = T(0.99 \cdot n) + 7$
  - $T(n) = T(\sqrt{n}) + 1$
4. Suponha que você está tentando escolher entre os três algoritmos abaixo. Qual o tempo de cada um em notação assintótica e qual você escolheria?
  - Algoritmo A resolve o problema dividindo a entrada em cinco subproblemas com a metade do tamanho, resolve cada subproblema recursivamente e depois combina-os em tempo linear.
  - Algoritmo B resolve o problema dividindo a entrada em dois subproblemas de tamanho  $n-1$  (onde  $n$  é o tamanho da entrada), resolve cada subproblema recursivamente e depois combina-os em tempo constante.
  - Algoritmo C resolve o problema dividindo a entrada em nove subproblemas com um terço do tamanho, resolve cada subproblema recursivamente e depois combina-os em tempo quadrático.

5. Use o algoritmo de divisão e conquista para multiplicação de inteiros a fim de multiplicar os dois números binários 10011011 e 10111010.
6. Suponha que você tem  $k$  vetores ordenados de tamanho  $n$  e deseja combiná-los em um único vetor ordenado de tamanho  $kn$ .
- Uma ideia é usar o algoritmo INTERCALA, intercalando o primeiro e o segundo, depois intercalando o resultado com o terceiro, depois com o quarto e etc... Qual a complexidade desse procedimento em termos de  $k$  e  $n$ ?
  - Mostre uma solução mais eficiente usando divisão e conquista.
7. O algoritmo do  $k$ -ésimo mínimo visto em sala de aula ainda seria  $\Theta(n)$  se tomássemos grupos de 3 elementos, ao invés de 5? E se tomássemos grupos de 7 elementos? Justifique usando o método da árvore de recursão.
8. Altere os algoritmos INTERCALA e MERGESORT para resolver o seguinte problema: dado um vetor com  $n$  números inteiros positivos e um outro número inteiro positivo  $x$ , determine se existem ou não dois elementos cuja soma é igual a  $x$ .
9. Elabore um algoritmo  $O(n)$  de decomposição de um vetor  $S$  em três subvetores. Esse algoritmo recebe como entrada, além do vetor  $S$ , um valor  $piv$  pertencente a  $S$ , e os índices  $p$  e  $r$ ,  $1 \leq p \leq r$ . O algoritmo deve rearrumar os elementos em  $S[p \dots r]$  e retornar dois índices  $q_1$  e  $q_2$  satisfazendo as seguintes propriedades:
- se  $p \leq k \leq q_1$ , então  $S[k] < piv$ ;
  - se  $q_1 < k \leq q_2$ , então  $S[k] = piv$ ;
  - se  $q_2 < k \leq r$ , então  $S[k] > piv$ .
10. Sejam  $X[1 \dots n]$  e  $Y[1 \dots n]$  dois vetores ordenados. Escreva um algoritmo  $\Theta(\log n)$  para encontrar a mediana de todos os  $2n$  elementos nos vetores  $X$  e  $Y$ . Prove esta complexidade.
11. Suponha que você possui dois vetores ordenados de tamanhos  $m$  e  $n$ . Você deseja obter o  $k$ -ésimo menor elemento da união desses dois vetores. Mostre um algoritmo de ordem  $\Theta(\log m + \log n)$  que faça isso.
12. Seja  $X[1 \dots n]$  um vetor de inteiros. Dados  $i < j$  em  $\{1, \dots, n\}$ , dizemos que  $(i, j)$  é uma inversão de  $X$  se  $X[i] > X[j]$ . Escreva um algoritmo  $\Theta(n \log n)$  que devolva o número de inversões em um vetor  $X$ .
13. Altere o algoritmo HEAPSORT para trabalhar com Heaps mínimos, ao invés de Heaps máximos. Argumente porque é melhor trabalhar com Heaps máximos ao invés de Heaps mínimos.
14. Prove usando loops invariantes que o algoritmo HeapSort e seu algoritmo da questão anterior estão corretos (dica: para cada algoritmo, prove a correção do pré-processamento e depois a parte final).