

Construção e Análise de Algoritmos
Lista de exercícios 1

1. Prove as seguintes afirmações sobre notação assintótica:

- $n^3/100 - 25n^2 - 100n + 7$ é $\Omega(n^2)$ e $\Theta(n^3)$
- $77n^3 - 13n^2 + 29n - 5$ é $O(n^4)$ e $\Omega(n^3)$
- $34n \log_7 n^2 + 13n$ é $\Omega(n)$ e $O(n^2)$

2. Resolva as seguintes equações de recorrência segundo o método da árvore de recursão:

- $T(n) = 2 \cdot T(n/3) + n$
- $T(n) = 3 \cdot T(n/3) + n$
- $T(n) = 4 \cdot T(n/3) + n$
- $T(n) = 8 \cdot T(n/3) + n^2$
- $T(n) = 9 \cdot T(n/3) + n^2$
- $T(n) = 10 \cdot T(n/3) + n^2$
- $T(n) = T(0.99 \cdot n) + n$
- $T(n) = T(0.99 \cdot n) + 7$
- $T(n) = a \cdot T(n^{1/a}) + \log_b(n)$, onde a e b são inteiros maiores que 1

3. O algoritmo do k -ésimo mínimo ainda seria $\Theta(n)$ se tomássemos grupos de 3 elementos, ao invés de 5? E se tomássemos grupos de 7 elementos? Justifique usando o método da árvore de recursão.

4. Uma pessoa sobe uma escada composta de n degraus, com passos que podem alcançar entre 1 e $k \leq n$ degraus. Escrever equações de recorrência que permitem determinar o número de modos distintos da pessoa subir a escada.

5. Altere os algoritmos INTERCALA e MERGESORT para resolver o seguinte problema: dado um vetor com n números inteiros positivos e um outro número inteiro positivo x , determine se existem ou não dois elementos cuja soma é igual a x .

6. Elabore um algoritmo $O(n)$ de decomposição de um vetor S em três subvetores. Esse algoritmo recebe como entrada, além do vetor S , um valor piv pertencente a S , e os índices p e r , $1 \leq p \leq r$. O algoritmo deve rearrumar os elementos em $S[p \dots r]$ e retornar dois índices q_1 e q_2 satisfazendo as seguintes propriedades:

- (a) se $p \leq k \leq q_1$, então $S[k] < piv$;
- (b) se $q_1 < k \leq q_2$, então $S[k] = piv$;
- (c) se $q_2 < k \leq r$, então $S[k] > piv$.

- 7.** Sejam $X[1 \dots n]$ e $Y[1 \dots n]$ dois vetores ordenados. Escreva um algoritmo $\Theta(\log n)$ para encontrar a mediana de todos os $2n$ elementos nos vetores X e Y . Prove esta complexidade.
- 8.** Seja $X[1 \dots n]$ um vetor de inteiros. Dados $i < j$ em $\{1, \dots, n\}$, dizemos que (i, j) é uma inversão de X se $X[i] > X[j]$. Escreva um algoritmo $\Theta(n \log n)$ que devolva o número de inversões em um vetor X .
- 9.** Altere o algoritmo HEAPSORT para trabalhar com Heaps mínimos, ao invés de Heaps máximos. Argumente porque é melhor trabalhar com Heaps máximos ao invés de Heaps mínimos.
- 10.** Prove usando loops invariantes que o algoritmo HeapSort e seu algoritmo da questão anterior estão corretos (dica: para cada algoritmo, prove a correção do pré-processamento e depois a parte final).