

Limites de Seqüências de Permutações de Inteiros

Rudini Menezes Sampaio

TESE APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO
DE
DOUTOR EM CIÊNCIAS

Área de Concentração: Ciência da Computação
Orientador: Prof. Dr. Yoshiharu Kohayakawa

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da CAPES

São Paulo, julho de 2008

Agradecimentos

Ao professor Yoshiharu Kohayakawa, pela sua orientação e paciência.

A todos do IME que de alguma forma me acompanharam:

Cristiane, Pavlos, Bruno, Prof^ª Yoshiko, Prof^ª Beti Kira.

Aos meus pais Antônio José e Thaís Eliane e a meus irmãos Sávio, Igor e Verbena

A minha avozinha viva Assizina e a meus avós falecidos

Aos meus parentes: sobrinhos(as), tios(as), sogros, cunhadas(o), compadres e comadres

A minha amada esposa Ana Karina e a meus filhos:

Samuel, Catarina, Miguel Francisco e outros que Deus ainda queira nos conceder.

“Feliz o homem que tem uma boa mulher, pois, se duplicará o número de seus anos.

A mulher forte faz a alegria de seu marido, e derramará paz nos anos de sua vida”.

(Eclesiástico, 26, 1-4)

A Nossa Senhora,

“porque te amo, ó mãezinha! porque teu nome dulcíssimo

faz vibrar meu coração!”. (Sta Teresinha)

A Deus,

“porque nos criastes para Vós e o nosso coração vive inquieto,

enquanto não repousa em Vós”. (Sto Agostinho)

“Dê-me, Senhor, agudeza para entender, capacidade para reter, método e faculdade para aprender, sutileza para interpretar, graça e abundância para falar. Dê-me, Senhor, acerto ao começar, direção ao progredir e perfeição ao concluir”. (São Tomás de Aquino)

*“Dê-me, Senhor, a tua graça. Que eu não dê valor nenhum às coisas do mundo
E fixe apenas em Ti meu pensamento, Sem dar ouvidos às vozes mutáveis dos homens,
Que eu me satisfaça com minha solidão”. (São Tomás Morus)*

“Oh, Senhor, eu peço para meu passado a Tua misericórdia, para meu presente o Teu amor e para o meu futuro a Tua providência”. (São Padre Pio)

Resumo

Nesta tese, introduzimos o conceito de sequência convergente de permutações e provamos a existência de um “objeto limite” para tais sequências. Introduzimos ainda um novo modelo de permutação aleatória baseado em tais objetos e introduzimos um conceito novo de distância entre permutações. Provamos então que sequências de permutações aleatórias são convergentes e provamos a equivalência entre esta noção de convergência e convergência nesta nova distância. Obtemos ainda resultados em quase-aleatoriedade e testabilidade para permutações.

Nos Capítulos 1 e 2, mostramos resultados de quase-aleatoriedade para permutações e estudamos um Lema da Regularidade para permutações, devido a J.Cooper. Provamos um refinamento útil deste resultado. No Capítulo 3, estudamos um resultado de Lovász e Szegedy, onde é introduzido o conceito de sequência convergente de grafos e prova-se a existência de um “objeto limite” para tais sequências, que é uma função simétrica mensurável $W : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$. Eles definem ainda um novo modelo de grafo aleatório, chamado grafo W -aleatório $G(n, W)$.

No Capítulo 4, definimos um conceito novo de distância entre permutações e introduzimos o conceito de sequência convergente de permutações. Provamos então a existência de um objeto limite natural para estas sequências, a saber, uma função mensurável $Z : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ que satisfaz uma condição de “massa” e cujas “linhas” são funções de distribuição acumulada. Definimos ainda um modelo novo e bastante geral de permutação aleatória $\sigma(n, Z)$, que chamaremos permutação Z -aleatória. Provamos que sequências de permutações Z -aleatórias são convergentes e seu limite é Z . Provamos ainda um resultado sobre amostragem e uma caracterização para parâmetros testáveis de permutações, fornecendo uma definição alternativa para a quase-aleatoriedade de Cooper. Finalmente mostramos que sequências convergentes são Cauchy nesta nova distância.

Palavras-chave: Lema da regularidade, sequências convergentes, permutação de inteiros, densidade de subpermutações, objeto limite, quase-aleatoriedade, testabilidade, distância entre permutações.

Abstract

We introduce the concept of convergent sequence of permutations and we prove the existence of a “limit object” for these sequences. We also introduce a new and more general model of random permutation based on these “limit objects” and we introduce a new metric for permutations. We also prove that sequences of random permutations are convergent and we prove the equivalence between this notion of convergence and convergence in this new metric. We also show some applications in quasirandomness and testability for permutations.

In Chapter 1, we present some motivation and we study quasirandomness results for permutations. In Chapter 2, we study the Szemerédi’s regularity lemma and a recent version by J.Cooper about permutations. We prove an useful generalization of the Cooper’s result. In Chapter 3, we study a result of Lovász and Szegedy about the existence of a “limit object” for convergent sequences of dense graphs. Such ‘limit objects” consist of simetric measurable functions $Z : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$. They also define a new model of random graph, named W -random graph $G(n, W)$.

In Chapter 4, we investigate the same phenomenon for sequences of permutations, defining a new distance between permutations and the notion of convergent sequence of permutations. We also prove the existence of a natural limit object for these sequences: a measurable function $Z : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ satisfying a “mass” condition and such that the “lines” are cumulative density functions. We also define a new and more general random permutation model $\sigma(n, Z)$, named Z -random permutation. We prove that sequences of Z -random permutations are convergent and Z is a natural limit for it. We also prove a sampling result and a characterization for testable parameters of permutations, that implies an alternative definition for Cooper’s quasirandomness for permutations. Finally, we show that convergent sequences are Cauchy in this new metric.

Keywords: Regularity lemma, convergent sequences, permutations, density of subpermutations, limit object, quasirandomness, testability, permutation metrics.

Sumário

Lista de Símbolos	xi
Lista de Figuras	xiii
1 Introdução	1
1.1 Quase-Aleatoriedade	5
2 Lema da Regularidade	13
2.1 Grafos	13
2.2 Permutações de inteiros	16
3 Limites de Sequências de Grafos Densos	27
4 Limites de Sequências de Permutações	33
4.1 Distância entre Permutações	36
4.2 Densidade de Subpermutações	41
4.3 Objeto Limite das Permutações	44
4.4 Convergência das Sequências de Permutações	55
4.5 Permutações Z -aleatórias	64
4.6 Unicidade do Objeto Limite	66

4.7	Testabilidade em Permutações	72
4.8	Comentários Finais	78
A	Resultados Básicos de Análise e Probabilidade	83
A.1	Funções de distribuição acumulada (Fda's)	86
	Referências Bibliográficas	95
	Índice Remissivo	99

Lista de Símbolos

$[n]$	$\{1, 2, \dots, n\}$, onde n é um inteiro positivo
$[n]_o^m$	Subconjunto dos pontos $(i_1 < \dots < i_m)$ de $[n]^m$ para m e n inteiros positivos
$[0, 1]_o^m$	Subconjunto dos pontos $(x_1 < \dots < x_m)$ de $[0, 1]^m$ para m inteiro positivo
$G(n, p)$	Grafo aleatório de Erdős e Rényi
$G(n, H)$	Grafo aleatório com modelo H (grafo ponderado) de Lovász e Sós
$G(n, W)$	Grafo W -aleatório de Lovász e Szegedy, onde W é um <i>graphon</i>
$\sigma(n, Z)$	Permutação Z -aleatória, onde Z é uma <i>permutação limite</i>
$\sigma(n, \mathcal{F})$	Permutação \mathcal{F} -aleatória, onde \mathcal{F} é uma sequência finita de fdas contínuas

Lista de Figuras

2.1	Grafo da permutação 8,6,2,7,5,3,1,4	16
2.2	Grafo reduzido da permutação 8,6,2,7,5,3,1,4	17
2.3	Grafo sem conjunto excepcional da permutação 9,6,2,7,8,5,3,1,4	20
2.4	Grafo da Figura 2.3 modificado	20
2.5	Fda's dos intervalos do grafo da Figura 2.3	20
4.1	Matriz de adjacências do Grafo da permutação 8,6,2,7,5,3,1,4	36
4.2	Matriz de densidades do Grafo da Figura 2.2	36
4.3	Matriz de densidades do Grafo da Figura 2.3	37
4.4	Fdas da Matriz na Figura 4.3 acima	37
4.5	3-cubo $[0, 1]^3$ e o 3-simplexo $[0, 1]_o^3$	56

Capítulo 1

Introdução

Nesta tese, apresentamos alguns resultados e construções sobre permutações, dentre os quais inclui-se um modelo bastante geral para permutações aleatórias. Nossa motivação principal foi o trabalho de Lovász e Szegedy que introduziu um modelo bastante geral de grafo aleatório, que generaliza o modelo de Erdős e Rényi.

Erdős e Rényi, com seu artigo “On the Evolution of Random Graphs” [31] de 1960, praticamente fundaram a teoria dos grafos aleatórios, após Erdős descobrir a grande utilidade de métodos probabilísticos para tratar problemas extremais em teoria dos grafos [28], [29], [30].

Basicamente, o método probabilístico é utilizado em Matemática Discreta para provar de maneira não-constructiva a existência de uma estrutura com determinadas propriedades. Para isso, define-se um espaço de probabilidades apropriado para as estruturas e mostra-se que a propriedade desejada ocorre com probabilidade positiva nesse espaço.

Considera-se frequentemente que o método probabilístico foi usado pela primeira vez por Szele, em 1943, para provar que existe um torneio com n jogadores e pelo menos $n!2^{1-n}$ caminhos hamiltonianos. No entanto, Paul Erdős foi o primeiro a aplicar o método sucessivamente sobre vários tipos de problemas, iniciando em 1947 com um limite inferior para o número diagonal de Ramsey: $R(k, k) > \lfloor 2^{k/2} \rfloor$.

Seja n um inteiro positivo e $0 \leq p \leq 1$. O grafo aleatório $G(n, p)$ é um espaço de probabilidades sobre o conjunto dos grafos rotulados com n vértices, onde $\mathbb{P}(uv \in G) = p$, para todo par de vértices $u \neq v$, independentemente.

Erdős e Rényi provaram diversos resultados, como o fato de que muitas propriedades Q de grafos

surgem repentinamente. Ou seja, fixando a probabilidade $p(n)$, em função do número de vértices n , quase todos os grafos $G(n, p)$ possuem a propriedade Q ou quase todos não possuem a propriedade Q . A transição entre a propriedade ser muito provável e ser muito improvável é geralmente muito rápida. Dizemos que $r(n)$ é função limiar de uma propriedade Q de grafos se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(G(n, p) \in Q) = \begin{cases} 0 & \text{se } p = p(n) \text{ é tal que } \lim_{n \rightarrow \infty} p(n)/r(n) = 0 \\ 1 & \text{se } p = p(n) \text{ é tal que } \lim_{n \rightarrow \infty} p(n)/r(n) = \infty \end{cases}$$

Em 1987, Bollobás e Thomason [12] provaram a existência de funções limiares para todas as propriedades crescentes de grafos, como conectividade ou emergência de triângulos. No entanto, algumas dessas propriedades não possuem limites “mais precisos”. Dizemos que uma propriedade possui um limiar severo $r(n)$ se, $\forall \varepsilon > 0$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(G(n, p) \in Q) = \begin{cases} 0 & \text{se } p = p(n) < (1 - \varepsilon)r(n) \\ 1 & \text{se } p = p(n) > (1 + \varepsilon)r(n). \end{cases}$$

Em 1999, Friedgut [33] obteve uma condição necessária e suficiente para a obtenção de limiares severos. Grosso modo, propriedades globais como conectividade possuem limiares severos e propriedades locais como emergência de triângulos possuem limiares grosseiros.

Esses e outros resultados de grafos aleatórios constituem uma vasta área em combinatória. No entanto, para vários problemas reais, o modelo de grafo aleatório de Erdős e Rényi não se mostra adequado. Por exemplo, existe vasta literatura sobre modelos de grafos para a Internet, tanto para a ligação física entre os computadores, como para o grafo das páginas e seus links [11]. Esses grafos geralmente são similares a vários grafos conhecidos, como redes de relações sociais, co-publicações, disseminação de doenças, provedores de serviços de Internet (*autonomous systems*). Esses modelos de grafos geram redes por processos aleatórios, mas possuem propriedades bastante diferentes do grafo aleatório de Erdős e Rényi. Esses grafos tendem a ser aglomerados (“*clustered graphs*”), as vizinhanças dos vértices são mais densas que a densidade média de arestas, etc... [10]. Para maiores detalhes, ver o rigoroso artigo [11] de Bollobás e Riordan.

Nesses casos reais, os grafos geralmente crescem com o tempo. É o caso das páginas na Internet e suas ligações. Por isso, tem crescido em várias áreas do conhecimento, como matemática, ciência da computação e física, o interesse no estudo de propriedades de grafos muito grandes ou propriedades

de sequências de grafos que crescem indefinidamente.

Em 2004, Lovász e Szegedy [46] seguiram os trabalhos de [15] e introduziram a noção de convergência para sequências de grafos densos, baseada em densidade de homomorfismos, que será definida no Capítulo 3. Grosso modo, uma sequência (G_n) é convergente se, para todo grafo fixo F , a densidade de homomorfismos $t(F, G_n)$ de F em G_n converge (existe o limite para $n \rightarrow \infty$).

Eles provaram que existe um “objeto limite” natural para tais sequências, a saber, uma função mensurável simétrica $W : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$, chamada *graphon*. Prova-se ainda que todo *graphon* é o objeto limite de alguma sequência de grafos. Esse objeto limite é não-trivial e significativo conceitualmente, sendo possível obter o limite de muitos invariantes dos grafos da sequência a partir do objeto limite.

Além disso, Lovász e Szegedy introduziram um novo modelo de grafo aleatório, chamado grafo “ W -aleatório” $G(n, W)$, baseado em *graphons* W . Grafos aleatórios $G(n, p)$ de Erdős e Rényi podem ser modelados por grafos W -aleatórios, bastando ter $W(x, y) = p$ para todo $0 \leq x, y \leq 1$.

Lovász e Szegedy mostram ainda que todo modelo de grafo aleatório que satisfaz certas condições razoáveis pode ser modelado como um grafo W -aleatório $G(n, W)$ para algum *graphon* W apropriado. Esses conceitos serão detalhados no Capítulo 3.

Objetos limites de sequências de grafos já haviam sido construídos para grafos com grau limitado, por Benjamini e Schramm [7]. Objetos limites já apresentaram avanços em algumas áreas de pesquisa, como testabilidade e quase-aleatoriedade. Resultados importantes dessas áreas já foram obtidos com a ajuda de *graphons*.

Sobre testabilidade, Goldreich, Goldwasser e Ron [35] introduziram este conceito e provaram alguns resultados fundamentais. Testabilidade em grafos consiste basicamente em estimar um invariante (como o número cromático) ou decidir se possui certa propriedade (como ser 3-colorível), observando-se apenas um subgrafo pequeno tomado como amostra. Nem todos os invariantes ou propriedades de grafos podem ser estimados assim. Os que podem são chamados de “testáveis”.

Formalmente, dizemos que uma propriedade P é testável se existe outra propriedade P' tal que, para todo $\varepsilon > 0$, existe k que satisfaz o seguinte. Seja G um grafo qualquer com n vértices e G_k um subgrafo induzido aleatório com k vértices, $k < n$. Se G satisfaz P , então G_k satisfaz P' com probabilidade $1 - \varepsilon$. Se G não satisfaz P mesmo adicionando ou removendo εn^2 arestas, então G_k não satisfaz P' com probabilidade $1 - \varepsilon$. Não há interesse quando G não satisfaz P mas poderá satisfazer

com poucas alterações.

Várias propriedades já foram provadas testáveis, como k -colorabilidade [35], existência de uma clique de tamanho ρn [35] e ser livre de H [1]. Em 2005, Alon e Shapira [3] provaram que toda propriedade hereditária é testável. Em 2006, Alon, Fischer, Newman e Shapira [2] obtiveram uma caracterização para propriedades testáveis, a saber: uma propriedade é testável se e só se pode ser “reduzida” grosso modo a um número finito de instâncias do lema da regularidade de Szemerédi. Lovász e Szegedy [47] obtiveram uma prova alternativa do resultado de Alon e Shapira [3] (propriedades hereditárias são testáveis), e muito mais curta, usando *graphons* e sequências convergentes de grafos.

Graphons também são particularmente úteis em quase-aleatoriedade. A Seção 1.1 explicita quase-aleatoriedade com maiores detalhes. Em [13] e [14], Borgs et al. generalizam a teoria dos grafos quase-aleatórios usando *graphons* e a teoria das sequências convergentes de grafos densos. Além disso, em 2008, Lovász e Sós [45] definem um modelo mais geral de grafo quase-aleatório, a saber, grafos *H-quase-aleatórios*, onde H é um grafo com pesos nos vértices e arestas (inclusive laços), que chamaremos de grafo ponderado. Esta definição é motivada pelos resultados de *graphons*, já que todo H tem associado um *graphon* e, por isso, H pode ser modelo de uma sequência convergente de grafos (os grafos *H-quase-aleatórios*). Eles provam que várias propriedades de grafos *H-quase-aleatórios* são equivalentes. Essas propriedades estão relacionadas à similaridade estrutural com H .

O sucesso das aplicações baseadas em *graphons* motiva o estudo de objetos limites para sequências de outros tipos de estruturas. Em 2003, J. Cooper [21] obtém resultados de quase-aleatoriedade para permutações de inteiros, semelhantes aos de Chung e Graham, que serão explicitados na próxima seção. Em 2006, J. Cooper [22] obtém ainda uma versão para permutações do famoso lema da regularidade de Szemerédi.

Motivados por esses resultados, introduzimos o conceito de sequência convergente de permutações. Introduzimos ainda uma nova noção de distância entre permutações. Provamos então a existência de objetos limites para sequências convergentes de permutações, a saber, funções mensuráveis $Z : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$, satisfazendo uma condição de “massa” e tais que as colunas são funções de distribuição acumulada. Tais funções serão chamadas “permutações limite”.

Introduzimos ainda um modelo novo e bastante geral de permutação aleatória $\sigma(n, Z)$, que chamaremos permutação Z -aleatória, que generaliza o modelo comum de permutação aleatória. Provamos então que sequências de permutações Z -aleatórias são convergentes e seu limite é Z . Em

outras palavras, todo objeto Z é o limite de alguma sequência convergente de permutações.

Introduzimos ainda um conceito novo de distância entre permutações, que chamaremos distância retangular. Provamos então a equivalência entre este conceito de convergência e convergência na distância retangular. Ou seja, sequências convergentes são Cauchy na distância retangular.

Provamos ainda uma caracterização para testabilidade em permutações, a saber, um parâmetro $f(\sigma)$ de permutações é testável se e só se $(f(\sigma_n))$ converge para toda sequência convergente (σ_n) de permutações. No caso de *graphons*, existe em [13] um resultado semelhante, que é aplicado por exemplo em [47].

Provamos ainda no Corolário 66 uma definição alternativa e mais clara das permutações quase-aleatórias de Cooper, apresentadas na próxima seção.

1.1 Quase-Aleatoriedade

O conceito de grafo aleatório, bem como o próprio método probabilístico, é usado principalmente para determinar a existência de estruturas combinatórias com determinadas propriedades. Frequentemente uma prova de existência não é o suficiente, sendo necessária uma construção explícita.

Para isso, em geral, determina-se um conjunto de propriedades importantes dessas estruturas aleatórias. Estruturas que satisfazem tais propriedades são chamadas quase-aleatórias. Não são aleatórias, mas se comportam como se fossem, pois contêm as principais propriedades aleatórias. Com essas propriedades, torna-se relativamente fácil construir estruturas quase-aleatórias, que de certa forma imitarão as estruturas aleatórias (basta forçar que tais propriedades sejam satisfeitas).

O conceito de quase-aleatoriedade para grafos surgiu essencialmente com o artigo [20] de Chung, Graham e Wilson em 1989. Eles definiram grafos quase-aleatórios como sendo grafos que satisfazem certas propriedades, geralmente satisfeitas por grafos aleatórios $G(n, \frac{1}{2})$. Em outras palavras, sequências de grafos quase-aleatórios são determinísticas, mas possuem várias propriedades de grafos verdadeiramente aleatórios, no sentido de Erdős e Rényi. Um exemplo são os grafos de Paley (grafo dos resíduos quadráticos) comparados a grafos aleatórios $G(n, 1/2)$.

O principal e surpreendente resultado de Chung, Graham e Wilson [20] foi provar a equivalência das propriedades quase-aleatórias de grafos. Ou seja, se um grafo tem uma dessas propriedades, então também possui as demais.

Uma dessas propriedades diz que, para todo grafo fixo, o número de cópias rotuladas é assintoti-

camente o mesmo em seqüências de grafos quase-aleatórios. Abaixo, listamos algumas propriedades para um grafo quase-aleatório G , onde $\Gamma(u)$ é a vizinhança de um vértice u em G e H é um grafo qualquer.

1. O número de arestas de G é $(1 + o(1))n^2/4$ e o número de C_4 em G é $(1 + o(1))(n/2)^4$.
2. Para todo H com $s \geq 4$ vértices, o número de cópias rotuladas de H em G é $(1 + o(1))n^s 2^{-\binom{s}{2}}$.
3. Para todo $S \subset V(G)$, o número de arestas de G com ambas as extremidades em S é $\frac{1}{4}|S|^2 + o(n^2)$.
4. $\sum_{u,v \in V(G)} \left| |\Gamma(u) \cap \Gamma(v)| - n/4 \right| = o(n^3)$.

Posteriormente, essas propriedades foram estendidas para o caso geral $G(n, p)$. Desde então outros resultados de quase-aleatoriedade surgiram, como para hipergrafos ([17], [18], [40]), subconjuntos de \mathbb{Z}_n [19] e permutações de inteiros [21].

Em 1992, Chung e Graham [19] estenderam os resultados de quase-aleatoriedade para subconjuntos de \mathbb{Z}_n . Eles descreveram uma classe de propriedades quase-aleatórias para subconjuntos de \mathbb{Z}_n , fornecendo ainda construções explícitas de subconjuntos que satisfazem essas propriedades. Assim como nos grafos, eles provaram que essas propriedades são equivalentes entre si.

Para $S \subset \mathbb{Z}_n$, designamos sua função indicadora pelo mesmo termo, ou seja, $S(x) = 1$, se $x \in S$, e $S(x) = 0$, caso contrário. A translação de S por x é o conjunto $S + x = \{s + x | s \in S\}$. Observe que a soma de elementos de \mathbb{Z}_n é sempre feita módulo n . O grafo Chung-Graham de S , denotado por $\text{CG}_n(S)$, tem \mathbb{Z}_n como conjunto de vértices e $x, y \in \mathbb{Z}_n$ formam uma aresta se e só se $x + y \in S$.

Abaixo, enumeramos as propriedades descritas em [19] para um subconjunto quase-aleatório $S \subseteq \mathbb{Z}_n$, onde $s = |S|$ e $t = |T|$. Para a notação assintótica, consideramos que estamos trabalhando com uma seqüência $n_i \rightarrow \infty$ e uma seqüência infinita de conjuntos $S_i \subset \mathbb{Z}_{n_i}$ e dizemos “para quase todo $x \in \mathbb{Z}_n$ ” quando nos referimos a todo $x \in \mathbb{Z}_n$ exceto $o(n)$ elementos.

1. (WT) — *Weak translation*. Para quase todo $x \in \mathbb{Z}_n$,

$$|S \cap (S + x)| = s^2/n + o(n).$$

2. (ST) — *Strong translation*. Para todo $T \subset \mathbb{Z}_n$ e quase todo $x \in \mathbb{Z}_n$,

$$|S \cap (T + x)| = st/n + o(n).$$

3. ($P(k)$) — *k-pattern*. Para todo k fixo e quase todos $u_1, \dots, u_k \in \mathbb{Z}_n$,

$$\sum_{x \in \mathbb{Z}_n} \prod_{j=1}^k S(x + u_j) = s^k/n^{k-1} + o(n).$$

O produtório interno é 1, se todos $x + u_j \in S$, e 0, caso contrário.

4. ($R(k)$) — *k-representation*. Para todo k fixo e para quase todo $x \in \mathbb{Z}_n$,

$$\sum_{u_1 + \dots + u_k = x} \prod_{j=1}^k S(u_j) = s^k/n + o(n^{k-1}).$$

O produtório interno é 1, se todos $u_j \in S$, e 0, caso contrário.

5. (EXP) — *Exponential sum*. Seja $i = \sqrt{-1}$. Para todo $j \neq 0$ em \mathbb{Z}_n ,

$$\sum_{x \in \mathbb{Z}_n} S(x) \exp\left(\frac{2\pi i j x}{n}\right) = o(n).$$

Significa que esses vetores de raio 1 devem praticamente se anular, ou seja, os elementos devem estar bem “espalhados”.

6. (GRAPH) — *Quasi-random graph*. O grafo $CG_n(S)$ é quase-aleatório.

7. ($C(2t)$) — *2t-cycle* em $CG_n(S)$.

$$\sum_{x_1, \dots, x_{2t}} S(x_1 + x_2)S(x_2 + x_3) \cdots S(x_{2t-1} + x_{2t})S(x_{2t} + x_1) = s^{2t} + o(n^{2t}).$$

8. (DENSITY) — *Relative Density*. Para todo $T \subset \mathbb{Z}_n$,

$$\sum_{x, y} T(x)T(y)S(x + y) = st^2/n + o(n^2).$$

O somando representa que a soma de cada par de elementos de T pertence a S .

Em 2003, Cooper [21] definiu quase-aleatoriedade para permutações de inteiros, e também mostrou que as propriedades quase-aleatórias são equivalentes entre si. Para isso, Cooper enfraqueceu a noção de Chung-Graham de conjunto quase-aleatório de inteiros, usando conceitos de discrepância de sequências de números reais [54], que ele chamará conjuntos ε -balanceados.

Formalmente, dados subconjuntos $S, T \subset \mathbb{Z}_n$, definimos a discrepância de S em T como

$$D_T(S) = \left| |S \cap T| - \frac{|S||T|}{n} \right|.$$

A discrepância máxima de S é definida como

$$D(S) = \max_{T \in I[n]} D_T(S),$$

onde $I[n]$ denota o conjunto de todos os intervalos de $[n]$.

Dizemos então que um subconjunto $S \subset \mathbb{Z}_n$ é ε -balanceado se $D(S) < \varepsilon n$. É possível comparar e observar uma relação entre quase-aleatoriedade de Chung e Graham para conjuntos de \mathbb{Z}_n e conjuntos ε -balanceados de Cooper.

Todo conjunto quase-aleatório de \mathbb{Z}_n é $o(1)$ -balanceado. Isso porque a propriedade (ST) (“*Strong Translation*”) de Chung-Graham implica que, $\forall \varepsilon > 0$, $D_{T+x}(S) < \varepsilon$, para algum x tal que $|x| \leq \varepsilon n$. Como $|T \Delta (T+x)| \leq 2\varepsilon n$, então $D_T(S) < 3\varepsilon n$.

No entanto, ε -balanceamento é estritamente mais fraco que quase-aleatoriedade. Por exemplo, o conjunto $S = \{2x \mid 0 \leq x \leq n-1\} \subset \mathbb{Z}_{2n}$ é ε -balanceado, para todo $\varepsilon > 0$ e n suficientemente grande. No entanto, S não é quase-aleatório, pois viola a propriedade (WT) (“*Weak Translation*”), visto que $S \cap (S+x)$ é vazio em muitos casos. Ou seja, S é um conjunto $o(1)$ -balanceado, mas não é quase-aleatório.

Com essas definições, Cooper apresenta propriedades equivalentes para conjuntos $S \subset \mathbb{Z}_n$ $o(1)$ -balanceados, a saber:

1. (B) — *Balance*. $D(S) = o(n)$
2. (PB) — *Piecewise Balance*. $D_T(S) = o(n \cdot c(T))$, para todo subconjunto $T \subset \mathbb{Z}_n$, onde $c(T)$

é o número de intervalos maximais de T .

3. (MB) — *Multiple Balance*. $D(kS) = o(|k|n)$, para todo $k \in \mathbb{Z}_n$, $k \neq 0$, onde kS é o multiconjunto $\{ks | s \in S\}$ e $|k|$ é a representação de k no intervalo $(-n/2, n/2]$.
4. (E($\frac{1}{2}$)) — *Eigenvalue Bound* $\frac{1}{2}$. $\tilde{S}(k) = \sum_{x \in \mathbb{Z}_n} S(x)e^{-2\pi ikx/n} = o(|k|^{1/2}n)$, $\forall k \in \mathbb{Z}_n \setminus \{0\}$.
5. (E(α)) — *Eigenvalue Bound* α . $\tilde{S}(k) = \sum_{x \in \mathbb{Z}_n} S(x)e^{-2\pi ikx/n} = o(|k|^\alpha n)$, $\forall k \in \mathbb{Z}_n \setminus \{0\}$.
6. (S) — *Sum*. $\sum_{k \in \mathbb{Z}_n \setminus \{0\}} \left(|\tilde{S}(k)|/|k| \right)^2 = o(n^2)$.
7. (T) — *Translation*. Para todo intervalo $T \in I[n]$,

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}_n} \left(|S \cap (T + k)| - \frac{|S||T|}{n} \right)^2 = o(n^3).$$

Tais propriedades são estendidas por Cooper para permutações de inteiros. A definição central de Cooper é a de que “permutação quase-aleatória” é aquela que leva cada intervalo em conjuntos altamente balanceados.

Formalmente, definimos a discrepância de uma permutação $\sigma : \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_n$ como

$$D(\sigma) = \max_{S \in I[n]} D(\sigma(S)) = \max_{S, T \in I[n]} \left| |\sigma(S) \cap T| - \frac{|S||T|}{n} \right|.$$

Cooper define então que uma seqüência de permutações (σ_j) é quase-aleatória se $D(\sigma_j) = o(n)$. Ou seja, se para todo $S \in \mathbb{Z}_n$, $\sigma_j(S)$ é $o(1)$ -balanceado. Isso relaciona permutações quase-aleatórias com as sete propriedades acima.

Cooper obtém ainda mais três propriedades equivalentes de seqüências de permutações quase-aleatórias. Dizemos que o número de ocorrências do padrão $\tau : \mathbb{Z}_m \rightarrow \mathbb{Z}_m$ em $\sigma : \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_n$ é o número de m -uplas $\{x_1 < x_2 < \dots < x_m\} \subset \mathbb{Z}_n$ tais que $\sigma(x_i) < \sigma(x_j)$ se e só se $\tau(i) < \tau(j)$.

1. (UB) — *Uniform Balance*. $D(\sigma) = o(n)$. Ou seja, σ é quase-aleatória.
2. (SP) — *Separability*. Para todos intervalos $I, J, K, K' \subset \mathbb{Z}_n$,

$$\left| \sum_{x \in K \cap \sigma^{-1}(K')} I(x)J(\sigma(x)) - \frac{1}{n} \sum_{(x,y) \in K \times K'} I(x)J(y) \right| = o(n)$$

Observe que $K \cap \sigma^{-1}(K') = \{x \in K : \sigma(x) \in K'\}$

3. (mS) — *m-Subsequences*. Para toda permutação $\tau : \mathbb{Z}_m \rightarrow \mathbb{Z}_m$ e intervalos $S, T \in \mathbb{Z}_n$ com $|S|, |T| \geq n/2$, temos que $|\sigma(S) \cap T| \geq n/4 + o(n)$ e o número de ocorrências do padrão τ em $\sigma(S) \cap T$ é

$$\frac{1}{m!} \binom{|\sigma(S) \cap T|}{m} + o(n^m)$$

4. (2S) — *2-Subsequences*. Para todos os intervalos $S, T \in \mathbb{Z}_n$ com $|S|, |T| \geq n/2$, temos que $|\sigma(S) \cap T| \geq n/4 + o(n)$ e a diferença entre o número de ocorrências do padrão “01” e do padrão “10” é $o(n^2)$.

No Corolário 66, nós fornecemos uma definição alternativa para permutações quase-aleatórias de Cooper, semelhante a de grafos. Resumindo, este corolário afirma que uma sequência de permutações é quase-aleatória se e só se a densidade de ocorrências de um padrão $\tau : \mathbb{Z}_m \rightarrow \mathbb{Z}_m$ converge para $1/m!$ para todo τ . As definições necessárias se encontram no Capítulo 4.

Baseado nesses resultados de Cooper, daremos nesse trabalho uma nova definição de distância entre permutações, que será usada no Capítulo 4. Adiantando, definiremos a distância retangular entre permutações $\sigma, \sigma' : \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_n$ como sendo

$$d_{\square}(\sigma, \sigma') = \frac{1}{n} \max_{S, T \in I[n]} \left| |\sigma(S) \cap T| - |\sigma'(S) \cap T| \right|.$$

Com isso, para ilustrar, dadas duas sequências de permutações quase-aleatórias (σ) e (σ'), temos que $d_{\square}(\sigma, \sigma') = o(1)$. Como já mencionado, para a notação assintótica consideramos que estamos trabalhando com uma sequência $n_i \rightarrow \infty$ e sequências infinitas de permutações $\sigma_i, \sigma'_i \subset \mathbb{Z}_{n_i}$.

Introduziremos ainda o conceito de sequência convergente de permutações, baseado em densidade de subpermutações, as quais também serão Cauchy nesta distância. Provaremos também a existência para tais sequências de um “objeto limite” semelhante aos *graphons*, a saber, funções mensuráveis $Z : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ cujas “linhas” formam funções de distribuição acumulada e satisfaz uma restrição de “massa”. Definiremos ainda um modelo bastante geral de permutação aleatória $\sigma(n, Z)$, que contempla as permutações aleatórias comuns (basta tomar $Z_u : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ tal que $Z_u(x, y) = y$, para todo $0 \leq x, y \leq 1$).

A principal ferramenta usada nestas provas é o Lema da Regularidade de Szemerédi em sua

versão para permutações de inteiros, proposta por Cooper [22]. O Lema da Regularidade surgiu em um contexto interessante. Seja S um conjunto de inteiros e \mathcal{P} uma propriedade.

Definição 1 (partição mantém a propriedade). *Escrevemos $S \rightarrow (\mathcal{P})_r$ se toda coloração dos elementos de S com r cores gera um subconjunto monocromático que satisfaz a propriedade \mathcal{P} .*

Definição 2 (densidade mantém a propriedade). *Escrevemos $S \rightarrow_\eta \mathcal{P}$ se todo subconjunto $U \subset S$, com $|U| \geq \eta|S|$, satisfaz a propriedade \mathcal{P} .*

Seja PA_k a propriedade de conter uma progressão aritmética com k elementos. Em 1936, Erdős e Turán conjecturaram uma versão de densidade do Teorema de van der Waerden abaixo.

Teorema 3 (van der Waerden [57], 1927). $\forall k, r > 0, \exists n_0$, tal que, se $n > n_0$,

$$[n] \rightarrow (PA_k)_r$$

Esta conjectura foi provada somente em 1975, por E.Szemerédi [55].

Teorema 4 (Szemerédi [55], 1975). $\forall \eta > 0, k > 0, \exists n_0$, tal que, se $n > n_0$,

$$[n] \rightarrow_\eta PA_k$$

Um lema auxiliar da prova deste teorema, conhecido atualmente como o lema da regularidade de Szemerédi, veio a se tornar uma das ferramentas mais usadas para atacar problemas em combinatória extremal.

Grosso modo, o lema da regularidade estabelece que todo grafo pode ser decomposto em um número limitado de grafos bipartidos quase-aleatórios, com relação a distribuição das arestas. Esta distribuição possui um fator de erro quadrático no número de vértices do grafo, mas com uma constante multiplicativa arbitrariamente pequena. Com isso, é possível lidar com a distribuição das arestas do grafo original, desde que ele possua um número quadrático de arestas. Obtemos assim uma boa representação do grafo original a partir de um grafo reduzido ponderado, onde os pesos são as densidades entre as partes.

Associado ao lema da regularidade, existe um fato conhecido como “lema da contagem”, muito usado em aplicações, que permite estimar o número de certos subgrafos pequenos no grafo regularizado. As definições explícitas serão fornecidas em um capítulo à parte, visto que são necessárias

várias definições preliminares.

Em 1993, Kohayakawa e Rödl [38], [39] provaram independentemente uma versão esparsa do lema da regularidade, ou seja, para os casos em que o número de arestas é subquadrático no número de vértices. Recentemente foram provadas variantes do lema da regularidade para hipergrafos. Em 2002, Frankl and Rödl [32] provaram uma versão para 3-grafos (hipergrafos 3-uniformes), onde a decomposição é feita sobre grafos tripartidos quase-aleatórios. O particionamento é feito sobre o conjunto de vértices e sobre o conjunto de pares de vértices do 3-grafo. Em 2004, Rödl e Skokan [50] generalizaram o lema da regularidade para k -grafos, obtendo ainda o lema da contagem associado. O particionamento é feito sobre todas as j -uplas do k -grafo, $\forall j < k$.

Em 2006, J.Cooper [22] provou uma versão do lema da regularidade para permutações de inteiros $\sigma : \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_n$, que será usado neste trabalho. Os particionamentos são realizados em intervalos de inteiros e a demonstração segue bem de perto a de Szemerédi. Cooper obtém ainda um lema da contagem para subpermutações e vários resultados intermediários interessantes, como uma caracterização de permutações quase-aleatórias.

O lema da regularidade de Cooper particiona os inteiros em intervalos com exatamente o mesmo tamanho. Esses intervalos podem, no entanto, ser separados por pequenos intervalos indesejados, cuja união forma um conjunto excepcional pequeno limitado em tamanho por εn . A prova de Lovász e Szegedy realiza sucessivos refinamentos, o que não é possível nesta versão de Cooper.

Para isso, nós provamos nesse trabalho uma versão do lema de regularidade de Cooper sem a necessidade de conjunto excepcional. No caso de grafos, tal prova é bastante simples, pois podemos remanejar à vontade os vértices do conjunto excepcional para os conjuntos da partição. Mas, no caso de permutações, o particionamento é feito em intervalos, o que dificulta bastante a prova e aumenta sua complexidade. Nossa versão sem conjunto excepcional é utilizada na obtenção do objeto limite para sequências convergentes de permutações, devido ao fato de podermos sempre refinar os particionamentos e com isso seguir a demonstração de Lovász e Szegedy.

Capítulo 2

Lema da Regularidade

2.1 Grafos

Usaremos nessa tese a notação $X = Y \pm \varepsilon$ para denotar $|X - Y| \leq \varepsilon$. Seja $G = (V, E)$ um grafo e $A, B \subseteq V$ subconjuntos disjuntos de V . Definimos a densidade $d_G(A, B)$ do par (A, B) , ou simplesmente $d(A, B)$ quando G estiver subentendido, por:

$$d_G(A, B) = \frac{e_G(A, B)}{|A||B|}$$

onde $e_G(A, B)$ é o número de arestas com uma extremidade em A e a outra em B .

Dizemos que o par (A, B) é ε -regular em G se para todos $A' \subseteq A$, $B' \subseteq B$ tais que $|A'| \geq \varepsilon|A|$, $|B'| \geq \varepsilon|B|$, temos que

$$d_G(A', B') = d_G(A, B) \pm \varepsilon$$

Na verdade, a regularidade pode ser verificada apenas para subconjuntos A'' e B'' de tamanho igual a $a = \lceil \varepsilon|A| \rceil$ e $b = \lceil \varepsilon|B| \rceil$, já que

$$d_G(A', B') = \frac{1}{\binom{|A'|}{a} \binom{|B'|}{b}} \sum_{\substack{A'' \subseteq A', |A''|=a \\ B'' \subseteq B', |B''|=b}} d(A'', B'').$$

O lema da regularidade de Szemerédi é uma poderosa ferramenta na teoria dos grafos extremais. Uma das suas consequências mais importantes é que, em circunstâncias apropriadas, ele pode ser

usado para mostrar que um dado grafo possui um subgrafo fixo. Essa observação segue direta e facilmente do resultado abaixo, conhecido por *Lema da Contagem* para grafos.

Lema 5 (Lema da Contagem). *Se $G = \cup_{1 \leq i < j \leq k} G^{ij}$ é um grafo k -partido com $V(G) = V_1 \cup \dots \cup V_k$, com $|V_1| = \dots = |V_k| = n$, onde todos G^{ij} são ε -regulares com densidade d , então o número de k -cliques K_k em G é:*

$$d^{\binom{k}{2}} n^k (1 \pm f(\varepsilon))$$

onde $f(\varepsilon) \rightarrow 0$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Ademais, se $\varepsilon < d$, então $|f(\varepsilon)| < 1$, para n suficientemente grande.

O Lema da Regularidade de Szemerédi, 1978, é o seguinte resultado:

Teorema 6 (Lema da Regularidade). $\forall \varepsilon, t_0, \exists T_0, n_0$, Se G é um grafo com $|V(G)| = n > n_0$, então existe uma partição de $V(G) = V_0 \cup V_1 \cup \dots \cup V_t$ tal que:

- $t_0 \leq t \leq T_0$
- $|V_0| < \varepsilon n$
- $|V_1| = \dots = |V_t|$
- Com exceção de no máximo εt^2 , todos os pares (V_i, V_j) são ε -regulares.

Como consequência direta, temos uma variante nas arestas, substituindo a última linha por:

- Com exceção de no máximo εn^2 , todas as arestas pertencem a pares (V_i, V_j) ε -regulares.

O conjunto V_0 será chamado *excepcional* e sua existência é puramente técnica: para tornar possível que todos os outros conjuntos tenham exatamente a mesma cardinalidade. Se essa condição $|V_i| = |V_j|$ for “relaxada” para $||V_i| - |V_j|| \leq 1$, podemos considerar $V_0 = \emptyset$.

A variável t_0 exerce uma função importante limitando o número mínimo de partes. Ela faz com que as classes V_i possam ser suficientemente pequenas de modo que o número de arestas dentro dessas classes seja proporcionalmente desprezível. De fato, como $t > t_0$, escolhendo um t_0 suficientemente grande, o número de arestas internas é no máximo $t \binom{n/t}{2} \sim \binom{n}{2} / t \leq \binom{n}{2} / t_0$.

Além disso, a variável T_0 garante que o número de partes seja limitado ($t \leq T_0$), pois, caso contrário, a partição poderia ser feita em n classes de tamanho 1, que seriam regulares trivialmente.

O fato de T_0 não depender de n é crucial para o lema, ou seja, é possível ter $n \gg T_0$ (é quase sempre o caso das aplicações).

Observe ainda que, como o erro no número de pares de conjuntos ε -regulares (ou no número de arestas na outra variante) é de ordem quadrática, um grafo que tenha número de arestas sub-quadrático, ou seja, $o(n^2)$, satisfaz o lema trivialmente, pois todas as suas arestas poderiam ser colocadas nos casos ruins, obtendo grafos vazios. Assim, o lema da regularidade é útil apenas para grafos densos.

Em [56], Szemerédi se questiona se os pares irregulares, previstos pelo lema, existiam de fato. Um exemplo simples dessa existência, mostrado em [1], é o grafo bipartido com classes $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ e $B = \{b_1, \dots, b_n\}$, onde $a_i b_j$ é uma aresta se e só se $i \leq j$.

Na prova do lema da regularidade, uma função chamada *index* é definida para cada partição de $V(G)$ a fim de “medir” quão regular são os pares dessa partição. Seja P uma partição de $V(G)$ em V_0, \dots, V_t e seja

$$\text{index}(P) = \frac{1}{t^2} \sum_{i=1}^t \sum_{j=i+1}^t d^2(V_i, V_j)$$

Observe que $\text{index}(P) \leq 1/2$. A idéia principal é que se a partição P viola as condições do lema da regularidade, ela pode ser *refinada* para uma partição Q com $\text{index}(Q)$ significativamente maior, segundo o lema abaixo:

Lema 7. *Seja $\varepsilon > 0$ e $G = (V, E)$ um grafo com n vértices. Seja P uma partição de V em $t + 1$ conjuntos V_0, \dots, V_t com $|V_0| < \varepsilon n$ e $|V_1| = \dots = |V_t|$. Se mais de εt^2 pares desses conjuntos não são ε -regulares, então existe um refinamento Q de P em $1 + t4^t$ conjuntos tal que $\text{index}(Q) \geq \text{index}(P) + \varepsilon^5/20$ e o conjunto excepcional V_0 aumenta de no máximo $n/4^t$.*

Segundo esse lema, aplicando k refinamentos sucessivos, obtemos uma partição P_k tal que

$$\frac{1}{2} \geq \text{index}(P_k) \geq \text{index}(P) + \frac{k\varepsilon^5}{20}$$

Portanto, $k \leq 10\varepsilon^{-5}$ e podemos obter uma partição satisfazendo as condições do lema da regularidade em menos de $10\varepsilon^{-5}$ passos.

2.2 Permutações de inteiros

Em 2004, Cooper [22] provou um lema da regularidade para permutações, que usaremos nesse trabalho. Dada uma permutação $\sigma : \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_n$, seja G_σ o grafo bipartido com partes (A, B) , $A = B = [n]$, onde (a, b) é uma aresta se e só se $\sigma(a) < b$. A Figura 2.1 abaixo mostra um exemplo do grafo G_σ para a permutação $\sigma : \mathbb{Z}_8 \rightarrow \mathbb{Z}_8$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 6 & 2 & 7 & 5 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix},$$

que a partir de agora denotaremos simplesmente por $\sigma = (8, 6, 2, 7, 5, 3, 1, 4)$.

$$\sigma = (8 , 6 , 2 , 7 , 5 , 3 , 1 , 4)$$

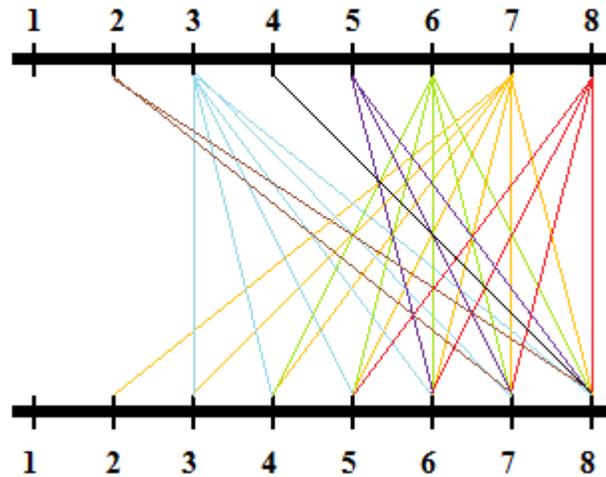


Figura 2.1: Grafo da permutação 8,6,2,7,5,3,1,4

Dados conjuntos $S, T \subset \mathbb{Z}_n$, seja $d_\sigma(S, T) = e_\sigma(S, T)/|S||T|$, onde

$$e_\sigma(S, T) = \left| \{(s, t) \in S \times T : \sigma(s) < t\} \right|.$$

Quando não houver motivo para confusão, escreveremos simplesmente $e(S, T)$ e $d(S, T)$.

Dados intervalos $C_s, C_t \subset \mathbb{Z}_n$, dizemos que o par (C_s, C_t) é ε -regular se, para todos os intervalos

$I_s \subseteq C_s$ e $I_t \subseteq C_t$, com $|I_s| \geq \varepsilon|C_s|$ e $|I_t| \geq \varepsilon|C_t|$, temos $d(I_s, I_t) = d(C_s, C_t) \pm \varepsilon$.

Uma k -partição $P = (C_i)_{i=0}^k$ de $\sigma : \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_n$ é constituída por intervalos C_i de \mathbb{Z}_n , para $1 \leq i \leq k$. Note que C_0 não é necessariamente um intervalo.

Dizemos que P é equilibrada se $|C_i| = |C_j|$, $\forall 1 \leq i, j \leq k$. Dizemos que \mathcal{P} é ε -regular se para todo, exceto no máximo εk^2 pares (s, t) , (C_s, C_t) é ε -regular.

Teorema 8 (Lema da Regularidade para Permutações [22]). $\forall \varepsilon, m, \exists n_0, M$ tais que, se $n \geq n_0$, toda permutação $\sigma : \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_n$ possui uma k -partição equilibrada $P = (C_i)_{i=0}^k$ ε -regular com $m \leq k \leq M$.

O Teorema 8 é uma regularização de G_σ em intervalos. Como exemplo, a Figura 2.2 mostra o grafo reduzido do grafo da Figura 2.1, com um particionamento bastante simples.

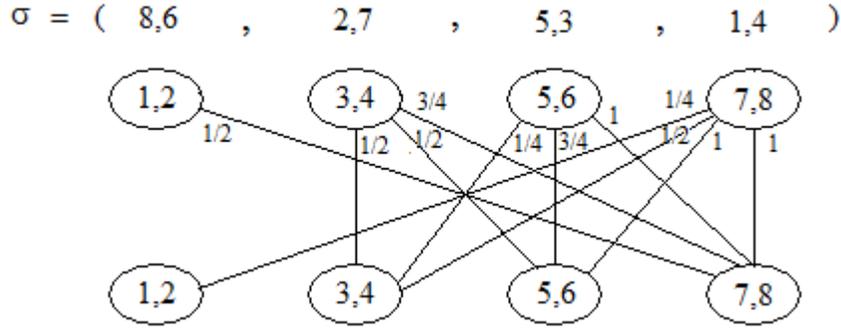


Figura 2.2: Grafo reduzido da permutação 8,6,2,7,5,3,1,4

Em [22], Cooper prova um corolário que considera mais aplicável na prática. De fato, a regularização acima é feita sobre um grafo construído sobre a permutação, o que pode dificultar a intuição de que o objeto regularizado é mesmo uma permutação.

Para enunciar o corolário, dizemos que duas funções $f, g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ são ε -próximas se, para todo $\alpha \in [0, 1]$, $g(\alpha - \varepsilon) - \varepsilon \leq f(\alpha) \leq g(\alpha + \varepsilon) + \varepsilon$, onde se convencionou que $f(\alpha) = g(\alpha) = 0$ para $\alpha < 0$ e $f(\alpha) = g(\alpha) = 1$ para $\alpha > 1$.

Dado um conjunto $S \subseteq \mathbb{Z}_n$ e $\alpha \in [0, 1]$, seja

$$\mathcal{L}(S, \alpha) = \frac{|\sigma(S) \cap [0, \alpha n]|}{|S|}.$$

Seja $\mathcal{F} = (F_i)_{i=1}^k$ uma coleção de funções. Dizemos que uma k -partição equilibrada $P = (C_i)_{i=0}^k$ de $\sigma : \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_n$ é $(\varepsilon, \mathcal{F})$ -uniforme se, para todo $s \in [k]$ e para todo $I_s \subseteq C_s$ com $|I_s| \geq \varepsilon|C_s|$, então $\mathcal{L}(I_s, \cdot)$ é ε -próxima de F_s .

No teorema abaixo, Cooper consegue representar permutações por meio de uma coleção de intervalos, cada qual tendo associada uma função de distribuição acumulada (fda) que estima razoavelmente, inclusive para pequenos subintervalos, a distribuição da permutação no intervalo.

Teorema 9 (Regularidade com fdas para Permutações [22]). $\forall \varepsilon, m, \exists n_0, M$ tais que, se $n \geq n_0$, toda permutação $\sigma : \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_n$ possui uma k -partição equilibrada $P = (C_i)_{i=0}^k$ $(\varepsilon, \mathcal{F})$ -uniforme com $m \leq k \leq M$, onde \mathcal{F} é uma coleção de k funções não-decrescentes C^∞ $f_s : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$. O mesmo também funciona para $\mathcal{F} = (\mathcal{L}(C_i, \cdot))_{i=1}^k$.

Para definição formal de fda e alguns resultados básicos, veja a Seção A.1. Uma observação importante é que cada fda tem associada uma medida de Lebesgue-Stieltjes. Dadas k fdas, temos k medidas de Lebesgue-Stieltjes e podemos obter o produto dessas medidas, possibilitando a integração sobre elas. Para maiores detalhes, veja as equações (A.4) e (A.5) e os Lemas 77 e 78 da Seção A.1.

Cooper [22] usa essa integração e obtém um Lema da Contagem para estimar o número de subpermutações baseado neste segundo lema da regularidade. Seja $[k]_o^m$ o conjunto dos pontos $x = (x_1, \dots, x_m)$ de $[k]^m$ tais que $x_1 < \dots < x_m$. Seja $[0, 1]_o^m$ o conjunto dos pontos $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ de $[0, 1]^m$ tais que $\alpha_1 < \dots < \alpha_m$.

Dados $\tau : \mathbb{Z}_m \rightarrow \mathbb{Z}_m$ e $\sigma : \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_n$, definimos o número de ocorrências do padrão τ em σ como o número de m -uplas $\{x_1 < x_2 < \dots < x_m\} \subset \mathbb{Z}_n$ tais que $\sigma(x_i) < \sigma(x_j)$ se e só se $\tau(i) < \tau(j)$.

Lema 10 (Lema da Contagem de Cooper [22]). *Seja $\sigma : \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_n$ uma permutação com partição $P = (C_i)_{i=0}^k$ $(\varepsilon, \mathcal{F})$ -uniforme, onde $\mathcal{F} = (F_i)_{i=1}^k$ é uma sequência de funções. Seja $\tau : \mathbb{Z}_m \rightarrow \mathbb{Z}_m$ uma permutação com $m < n$. Se as funções em \mathcal{F} são C^∞ , então*

$$\Lambda(\tau, \sigma) = |C_1|^m \sum_{x \in [k]_o^m} \int_{[0, 1]_o^m} dF_{x_1}(\alpha_{\tau(1)}) \cdots dF_{x_m}(\alpha_{\tau(m)}) \pm \frac{(20\varepsilon^{1/2}m^2 + 4/k)n^m}{(m-1)!}.$$

Se $F_i = \mathcal{L}(C_i, \cdot)$ para todo $i \in [m]$, então

$$\Lambda(\tau, \sigma) = |C_1|^m \sum_{x \in [k]_o^m} \int_{[0, 1]_o^m} dF_{x_1}(\alpha_{\tau(1)}) \cdots dF_{x_m}(\alpha_{\tau(m)}) \pm \frac{4\varepsilon n^m}{(m-1)!}.$$

Para a aplicação desse lema da regularidade sobre permutações (Teorema 8) para a obtenção de um objeto limite em uma prova similar a de Lovász e Szegedy, é necessário que não exista o conjunto excepcional C_0 . Isso porque serão feitas várias regularizações com valores de ε cada vez menores, e os particionamentos obtidos em determinado passo deverão ser refinamentos dos anteriores.

No entanto, a eliminação do conjunto excepcional para permutações não é tão trivial como para grafos. No caso de grafos, podemos distribuir à vontade os vértices do conjunto excepcional entre os conjuntos da partição. No caso de permutações, isso não é possível, pois o particionamento é feito em intervalos, ou seja, a ordem importa.

Uma idéia seria transladar os intervalos, tapando os buracos do conjunto excepcional. No entanto, isso também não funciona, pois pares ε -regulares podem deixar de sê-lo. Observe que, para $k > 1/\varepsilon$, temos $n/k < \varepsilon n$.

Resta-nos uma prova mais complexa que segue, com poucas mas substanciais modificações, a demonstração de Cooper [22] (que também segue quase identicamente a prova do lema da regularidade em [26]).

Gostaríamos de agradecer a Cristiane Maria Sato pelas discussões e pela correção de alguns pontos dessa prova. As Definições 11 e 13 abaixo relaxam a noção de partição equilibrada.

Definição 11. Uma k -partição $P = (C_i)_{i=1}^k$ de $\sigma : \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_n$ é constituída por intervalos C_i de \mathbb{Z}_n , para $1 \leq i \leq k$. Dizemos que P é equilibrada se $\left| |C_i| - |C_j| \right| \leq 1, \forall 1 \leq i, j \leq k$. Dizemos que \mathcal{P} é ε -regular se para todo, exceto no máximo εk^2 pares (s, t) , (C_s, C_t) é ε -regular.

Teorema 12 (Regularidade sem conjunto excepcional para permutações). $\forall \varepsilon, m, \exists n_0, M$ tais que, se $n \geq n_0$, toda permutação $\sigma : \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_n$ possui uma k -partição equilibrada $P = (C_i)_{i=1}^k$ ε -regular com $m \leq k \leq M$.

Definição 13. Dizemos que uma k -partição equilibrada $P = (C_i)_{i=1}^k$ de $\sigma : \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_n$ é $(\varepsilon, \mathcal{F})$ -uniforme se, para todos, exceto $\varepsilon k/2$, índices $s \in [k]$ e para todo $I_s \subseteq C_s$ com $|I_s| \geq \varepsilon |C_s|$, então $\mathcal{L}(I_s, \cdot)$ é ε -próxima de F_s , onde $\mathcal{F} = (F_i)_{i=1}^k$ é uma coleção de funções.

Teorema 14 (Regularidade sem conjunto excepcional e com fdas para permutações). $\forall \varepsilon, m, \exists n_0, M$ tais que, se $n \geq n_0$, toda permutação $\sigma : \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_n$ possui uma k -partição equilibrada $P = (C_i)_{i=1}^k$ $(\varepsilon, \mathcal{F})$ -uniforme com $m \leq k \leq M$, onde \mathcal{F} é uma coleção de k funções não-decrescentes $C^\infty f_s : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$. O mesmo também funciona para $\mathcal{F} = (\mathcal{L}(C_i, \cdot))_{i=1}^k$.

A Figura 2.3 mostra um exemplo do grafo para a permutação $(9, 6, 2, 7, 8, 5, 3, 1, 4)$ sem conjunto

excepcional com quatro intervalos. A Figura 2.4 mostra a mesma permutação em um grafo quase idêntico, mas com a inclusão de dois vértices. Esses vértices são colocados para melhorar o entendimento sobre as contas feitas, por exemplo, na Seção 4.2. A Figura 2.5 mostra as respectivas fdas da Figura 2.3.

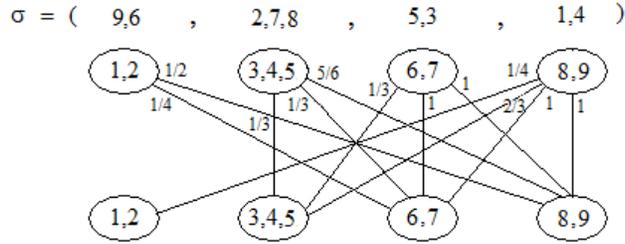


Figura 2.3: Grafo sem conjunto excepcional da permutação 9,6,2,7,8,5,3,1,4

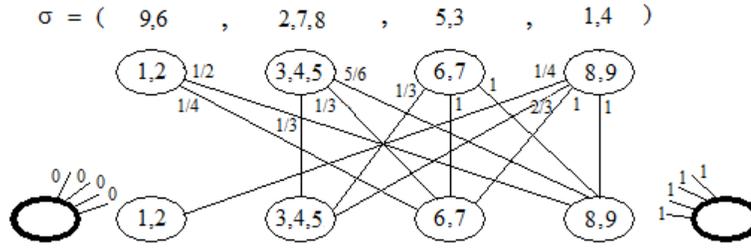


Figura 2.4: Grafo da Figura 2.3 modificado

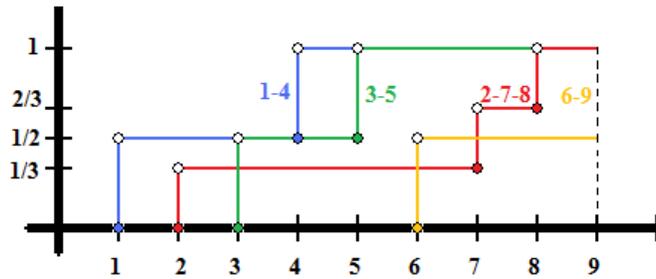


Figura 2.5: Fda's dos intervalos do grafo da Figura 2.3

Para provar os Teoremas 12 e 14 acima, refinaremos os Lemas 13 e 14 de [22]. Para isso, usaremos

o mesmo conceito *index* usado por Cooper e reproduziremos o Lema 12 de [22] para manter o entendimento da demonstração.

Dados conjuntos disjuntos $X, Y \in \mathbb{Z}_n$, definimos $index(X, Y)$ como

$$index(X, Y) = d^2(X, Y) \cdot \frac{|X||Y|}{n^2}.$$

Seja \mathcal{X} uma partição de X e \mathcal{Y} uma partição de Y . Definimos $index(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ como

$$index(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = \sum_{X' \in \mathcal{X}} \sum_{Y' \in \mathcal{Y}} index(X', Y').$$

Dada uma partição $P = (C_i)_{i=1}^k$ de \mathbb{Z}_n , definimos $index(P)$ como

$$index(P) = \sum_{i, j \in [k]} index(C_i, C_j) \leq n^{-2} \sum_{i, j \in [k]} |C_i||C_j| = 1.$$

Lema 15 (Lema 12 de [22]). *Sejam $C, D \in \mathbb{Z}_n$ não necessariamente disjuntos. Se \mathcal{C} e \mathcal{D} são partições de C e D , respectivamente, então $index(\mathcal{C}, \mathcal{D}) \geq index(C, D)$. Se P' é uma partição de \mathbb{Z}_n que refina outra partição P , então $index(P') \geq index(P)$.*

Prova. Ver prova do Lema 12 de [22]. □

Lema 16 (Lema 13 de [22]). *Seja $\varepsilon > 0$ e sejam $C, D \subset \mathbb{Z}_n$ intervalos. Se (C, D) não é ε -regular com respeito a σ , então existem partições $\mathcal{C} = (C_L, C_I, C_R)$ e $\mathcal{D} = (D_L, D_I, D_R)$ de C e D respectivamente, tais que*

$$index(\mathcal{C}, \mathcal{D}) \geq index(C, D) + \varepsilon^4 \frac{|C||D|}{n^2},$$

onde C_L e C_R (resp. D_L e D_R) podem ser vazios, mas não ambos.

Prova. Como (C, D) não é ε -regular com respeito a σ , então existem intervalos “irregulares” $C_I \subset C$ e $D_I \subset D$, com $|C_I| > \varepsilon|C|$ e $|D_I| > \varepsilon|D|$, tais que $|\eta| > \varepsilon$, onde $\eta = d(C_I, D_I) - d(C, D)$.

Sejam $\mathcal{C} = (C_L, C_I, C_R)$ e $\mathcal{D} = (D_L, D_I, D_R)$, onde C_L e D_L estão à esquerda de C_I em C e de D_I em D , respectivamente, e C_R e D_R estão à direita de C_I em C e de D_I em D , respectivamente.

$$\begin{aligned} \text{index}(\mathcal{C}, \mathcal{D}) &= \frac{1}{n^2} \sum_{i,j \in \{L,I,R\}} \frac{e^2(C_i, D_j)}{|C_i||D_j|} = \frac{1}{n^2} \left(\frac{e^2(C_I, D_I)}{|C_I||D_I|} + \sum_{(i,j) \neq (I,I)} \frac{e^2(C_i, D_j)}{|C_i||D_j|} \right) \\ &\geq \frac{1}{n^2} \left(\frac{e^2(C_I, D_I)}{|C_I||D_I|} + \frac{(e(C, D) - e(C_I, D_I))^2}{|C||D| - |C_I||D_I|} \right). \end{aligned}$$

Como

$$e(C_I, D_I) = e(C, D) \frac{|C_I||D_I|}{|C||D|} + \eta |C_I||D_I|,$$

temos que

$$\begin{aligned} \text{index}(\mathcal{C}, \mathcal{D})n^2 &\geq \frac{1}{|C_I||D_I|} \left(\frac{|C_I||D_I|}{|C||D|} e(C, D) + \eta |C_I||D_I| \right)^2 + \\ &+ \frac{1}{|C||D| - |C_I||D_I|} \left(\frac{|C||D| - |C_I||D_I|}{|C||D|} e(C, D) - \eta |C_I||D_I| \right)^2 \end{aligned}$$

Portanto, como $|C_I| \geq \varepsilon|C|$, $|D_I| \geq \varepsilon|D|$ e $\eta^2 > \varepsilon^2$, temos

$$\text{index}(\mathcal{C}, \mathcal{D})n^2 \geq \frac{e^2(C, D)}{|C||D|} + \eta^2 |C||D| \frac{|C_I||D_I|}{|C||D| - |C_I||D_I|} \quad (2.1)$$

$$\geq \frac{e^2(C, D)}{|C||D|} + \varepsilon^4 |C||D| = \text{index}(C, D)n^2 + \varepsilon^4 |C||D| \quad (2.2)$$

□

O lema abaixo é um refinamento do Lema 13 de [22]. A restrição $\varepsilon \leq 1/4$ é necessária para nossa prova desta melhoria, mas não faz parte do Lema 13 original de [22]. No entanto, ela é usada no Lema 14 de [22]. Por isso, podemos adiantá-la para nosso refinamento do Lema 13.

O principal objetivo nessa melhoria é permitir uma pequena diminuição sobre os intervalos centrais C_I e D_I da ordem de $1 - \varepsilon^5$.

Lema 17 (Refinamento do Lema 13 de [22]). *Seja $0 < \varepsilon \leq 1/4$ e sejam $C, D \subset \mathbb{Z}_n$ intervalos tais que (C, D) não é ε -regular com respeito a σ . Sejam $\mathcal{C} = (C_L, C_I, C_R)$ e $\mathcal{D} = (D_L, D_I, D_R)$ as partições de C e D , respectivamente, obtidas pelo Lema 13 de [22]. Para todos $0 \leq x, y \leq \varepsilon^5$, existem partições $\mathcal{C}' = (C'_L, C'_I, C'_R)$ e $\mathcal{D}' = (D'_L, D'_I, D'_R)$ de C e D , respectivamente, tais que $C'_L \supseteq C_L$, $C'_R \supseteq C_R$, $D'_L \supseteq D_L$, $D'_R \supseteq D_R$, $C'_I \subseteq C_I$ e $D'_I \subseteq D_I$ com $|C'_I| = |C_I|(1 - x)$ e $|D'_I| = |D_I|(1 - y)$, e satisfazendo*

o mesmo, ou seja,

$$\text{index}(C', D') \geq \text{index}(C, D) + \varepsilon^4 \frac{|C||D|}{n^2},$$

Prova. Na passagem entre a desigualdade (2.1) e a desigualdade (2.2), existe uma folga que podemos aproveitar. A desigualdade (2.1) diz que

$$\frac{\text{index}(\langle C_L, C_I, C_R \rangle, \langle D_L, D_I, D_R \rangle)}{|C||D|n^2} \geq \frac{\text{index}(C, D)}{|C||D|n^2} + \eta^2 \frac{|C_I||D_I|}{|C||D| - |C_I||D_I|},$$

onde $\eta = |d(C_I, D_I) - d(C, D)|$ é tal que $|\eta| > \varepsilon$.

Tomando $C'_I \subseteq C_I$ e $D'_I \subseteq D_I$ com $|C'_I| = |C_I|(1-x)$ e $|D'_I| = |D_I|(1-y)$, temos que

$$d(C'_I, D'_I) = \frac{e(C'_I, D'_I)}{|C'_I||D'_I|} = \frac{e(C_I, D_I) \pm (x+y)|C_I||D_I|}{|C_I||D_I|(1-x)(1-y)} = \frac{d(C_I, D_I) \pm (x+y)}{(1-x)(1-y)}.$$

Portanto

$$\begin{aligned} |d(C'_I, D'_I) - d(C_I, D_I)| &= \left| d(C_I, D_I) \left(1 - \frac{1}{(1-x)(1-y)} \right) \pm \frac{x+y}{(1-x)(1-y)} \right| \\ &= \left| \frac{d(C_I, D_I)(x+y-xy) \pm x+y}{(1-x)(1-y)} \right| \leq \frac{2(x+y)}{(1-x)(1-y)} \end{aligned}$$

Como $x, y \leq \varepsilon^5 \leq (1/4)^5$, temos que $\eta' = |d(C'_I, D'_I) - d(C, D)|$ satisfaz

$$|\eta'| > \varepsilon - \frac{x+y}{(1-x)(1-y)} > \varepsilon - 5\varepsilon^5$$

Aplicando o Lema 13 de [22] para as partições $\langle C'_L, C'_I, C'_R \rangle$ e $\langle D'_L, D'_I, D'_R \rangle$ de C e D , respectivamente, obtemos uma desigualdade idêntica a (2.1). Como $x, y \leq \varepsilon^5$ e $\varepsilon < 1/4$, temos que

$$\frac{\text{index}(\langle C'_L, C'_I, C'_R \rangle, \langle D'_L, D'_I, D'_R \rangle)}{|C||D|n^2} \geq \frac{\text{index}(C, D)}{|C||D|n^2} + \Delta,$$

onde

$$\Delta = \eta'^2 \frac{|C'_I||D'_I|}{|C||D| - |C'_I||D'_I|} \geq (\varepsilon - 5\varepsilon^5)^2 \frac{\varepsilon^2(1-x)(1-y)}{1 - \varepsilon^2(1-x)(1-y)}$$

$$\begin{aligned} &\geq \varepsilon^4 \frac{(1 - 5\varepsilon^4)^2 (1 - \varepsilon^5)^2}{1 - \varepsilon^2 (1 - \varepsilon^5)^2} \geq \varepsilon^4 \frac{(1 - 5\varepsilon^4 - \varepsilon^5)^2}{1 - \varepsilon^2 + 2\varepsilon^7 - \varepsilon^{12}} \geq \varepsilon^4 \left(\frac{1 - 10\varepsilon^4 - 2\varepsilon^5}{1 - \varepsilon^2 + 2\varepsilon^7} \right) \\ &\geq \varepsilon^4 \left(\frac{1 - 10\varepsilon^4 - 2\varepsilon^4(1/4)}{1 - \varepsilon^2(4\varepsilon)^2 + 2\varepsilon^4(1/4)^3} \right) \geq \varepsilon^4 \left(\frac{1 - 11\varepsilon^4}{1 - 15\varepsilon^4} \right) \geq \varepsilon^4 \end{aligned}$$

□

Nosso objetivo agora é provar um refinamento do Lema 14 de [22], cujo enunciado e prova seguem abaixo para facilitar o entendimento dessa melhoria.

Lema 18 (Lema 14 de [22]). *Sejam $0 < \varepsilon \leq 1/4$ e $\sigma : \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_n$ uma permutação. Seja $P = (C_i)_{i=0}^k$ uma partição de \mathbb{Z}_n com conjunto excepcional C_0 ($|C_0| \leq \varepsilon n$) e com partes iguais $|C_i| = |C_j| \geq 81^k$, para todos $i, j \in [k]$. Se P não é ε -regular, então existe uma partição $P' = (C'_i)_{i=0}^l$ de \mathbb{Z}_n para $k \leq l \leq k81^k$ com conjunto excepcional C'_0 ($|C'_0| \leq |C_0| + n/9^k$) e com partes iguais satisfazendo*

$$\text{index}(P') \geq \text{index}(P) + \varepsilon^5/2$$

Idéia da Prova. Daremos apenas uma idéia da prova. Seja $c = |C_1|$. Para todos $1 \leq i, j \leq k$, sejam \mathcal{C}_{ij} e \mathcal{C}_{ji} , respectivamente, partições de C_i e C_j definidas da seguinte forma. Se (C_i, C_j) é ε -regular, então $\mathcal{C}_{ij} = (C_i)$ e $\mathcal{C}_{ji} = (C_j)$. Senão, pelo Lema 13 de [22], existem tripartições \mathcal{C}_{ij} de C_i e \mathcal{C}_{ji} de C_j , tais que

$$\text{index}(\mathcal{C}_{ij}, \mathcal{C}_{ji}) \geq \text{index}(C_i, C_j) + \frac{\varepsilon^4 c^2}{n^2}.$$

Você pode imaginar a tripartição \mathcal{C}_{ij} como dois pontos a lápis sobre C_i , definindo três subintervalos. Para $i \in [k]$, seja \mathcal{C}_i a partição de C_i que é o refinamento comum a todas as partições \mathcal{C}_{ij} , para todo $j \in [k]$, $j \neq i$. Em palavras, é a partição de C_i em subintervalos obtida a partir de todos os pontos a lápis. Note que $|\mathcal{C}_i| \leq 9^k$.

Seja P'' o particionamento de \mathbb{Z}_n resultante da união dos particionamentos \mathcal{C}_i , $i \in [k]$. Cooper mostra que $k \leq |P''| \leq k9^k$ e $\text{index}(P'') \geq \text{index}(P) + \varepsilon^5/2$. A partição P'' satisfaz o lema, mas suas partes não têm o mesmo tamanho.

Para isso, Cooper divide cada intervalo não excepcional de P'' em intervalos de tamanho $d = \lfloor c/81^k \rfloor$, construindo a partição P' . Cooper termina a prova mostrando que $|C'_0| \leq |C_0| + n/9^k$. □

Lema 19 (Melhoria do Lema 18). *Se k e ε são tais que $81^k \geq 3/\varepsilon^6$, então o Lema 14 de [22] vale*

mesmo se considerarmos k -partições \mathcal{P} equilibradas (ou seja, em que os tamanhos dos intervalos diferem no máximo de 1) ε -irregulares, gerando partições \mathcal{P}' equilibradas e com mesmo conjunto excepcional C_0 que refinam \mathcal{P} .

Prova. O Lema 14 de [22] diz que, se uma k -partição \mathcal{P} de uma permutação σ de \mathbb{Z}_n não é ε -regular, então ela pode ser refinada para uma l -partição \mathcal{P}' tal que $k \leq l \leq k81^k$, $index(\mathcal{P}') \geq index(\mathcal{P}) + \varepsilon^5/2$ e o conjunto excepcional satisfaz $|C'_0| \leq |C_0| + n/9^k$.

Na prova deste lema, cada par de intervalos não regulares é triparticionado de acordo com o Lema 13 de [22]. Note que cada intervalo poderá ser triparticionado várias vezes e sua partição final será a partição baseada nessas sucessivas tripartições. Finalmente cada subintervalo da partição final de cada intervalo C de \mathcal{P} será subdividido em subintervalos pequenos de tamanho exatamente igual a $d = \lfloor c/81^k \rfloor$, onde $c = |C| > 81^k$. O que sobrar irá para o conjunto excepcional C'_0 .

No nosso Lema 17 acima, mostramos que a partir de uma tripartição (C_L, C_I, C_R) de C , onde $|C_I| \geq \varepsilon|C|$, pode-se obter tripartições (C'_L, C'_I, C'_R) , onde $C'_I \subseteq C_I$, $|C'_I| \geq |C_I|(1 - \varepsilon^5)$.

Se o tamanho k da partição \mathcal{P} é tal que $81^k \geq 3/\varepsilon^6$, então

$$2d = 2 \left\lfloor \frac{c}{81^k} \right\rfloor \leq c\varepsilon^6 \leq |C_I|\varepsilon^5$$

Com isso, antes de todo o processo, podemos dividir inicialmente cada intervalo C de \mathcal{P} em subintervalos I_j de tamanhos $\lfloor |C|/81^k \rfloor$ ou $\lceil |C|/81^k \rceil$. Você pode imaginar isso como uma marcação de $81^k - 1$ pontos a caneta sobre C equilibradamente espaçados.

Assim, no momento de realizar as várias tripartições posteriores (C_L, C_I, C_R) de C , podemos fazer com que elas “caiam” exatamente sobre as extremidades de alguns intervalos I_j . Você pode imaginar isso como uma pequena alteração dos pontos a lápis (que representam as extremidades de C_I) para que fiquem sobre pontos a caneta. Isso é possível, pois a variação máxima será menor que $2d \leq |C_I|\varepsilon^5$, o que é permitido pelo Lema 17.

No entanto, queremos permitir que \mathcal{P} seja equilibrada e sem conjunto excepcional. Ou seja, \mathcal{P} poderá ter intervalos com tamanhos c ou $c + 1$, por exemplo. Assim, resta saber se os intervalos I_j obtidos terão tamanhos que variam mais do que 1. Os tamanhos poderão ser $\lfloor c/81^k \rfloor$, $\lceil c/81^k \rceil$, $\lfloor (c + 1)/81^k \rfloor$, $\lceil (c + 1)/81^k \rceil$.

Suponha que $\lfloor c/81^k \rfloor = x - 1$ e $\lceil (c + 1)/81^k \rceil = x + 1$, para um inteiro x . Logo

$$x - 1 \leq \frac{c}{81^k} < x < \frac{c + 1}{81^k} \leq x + 1,$$

ou seja, $c < x81^k < c + 1$, que constitui um absurdo, pois c , x e k são inteiros. Assim, a partição final \mathcal{P}' , constituída pelos subintervalos I_j de cada intervalo, será equilibrada e sem conjunto excepcional. \square

Finalmente podemos provar os Teoremas 12 e 14.

Prova do Teorema 12. Basta seguir a prova do Teorema 1 de [22]. Sejam $\varepsilon > 0$ e $m > 1$ dados e suponha sem perda de generalidade que $\varepsilon < 1/4$. Seja $s = \lceil 2/\varepsilon^5 \rceil$. Aplicaremos s vezes o Lema 19 sobre $\sigma : \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_n$ para obter uma partição ε -regular equilibrada e sem conjunto excepcional.

Para isso, tome uma k -partição inicial equilibrada e sem conjunto excepcional, tal que $k > m$ e $81^k \geq 3/\varepsilon^6$. Cooper já considera em sua prova que $9^k \geq 4/\varepsilon^6$, então esta condição não foge às restrições já impostas por Cooper.

Precisamos garantir ainda que, em cada aplicação do Lema 19, o tamanho das partes seja suficientemente grande. Dada uma k -partição, a aplicação do Lema 19 leva a uma partição com no máximo $k81^k$ partes. Considere então a função $f(x) = x81^x$ e tome $M > f^{(s)}(k)$, onde $f^{(s)}$ significa s aplicações sucessivas da função f . Após s aplicações do Lema 19, σ terá no máximo M partes, cujos tamanhos serão pelo menos $\lceil n/M \rceil$. Tomando $n_0 = M81^M$, temos que, para todo $n > n_0$, o tamanho das partes sempre satisfará a condição no Lema 19 em todas as aplicações. \square

Prova do Teorema 14. Basta seguir a prova do Teorema 2 de [22]. Ao invés de aplicar o Teorema 1 de [22], aplicamos o nosso Teorema 12, que não gera conjunto excepcional. No entanto, os intervalos denominados “bad” deverão ser considerados não uniformes. Por isso, na Definição 13 permitimos intervalos não uniformes, ao contrário do Teorema 2 de [22]. \square

Capítulo 3

Limites de Sequências de Grafos Densos

Em 2004, Lovász e Szegedy [46] definiram o conceito de sequência convergente de grafos. Formalmente, seja (G_n) uma sequência de grafos simples. Para todo grafo simples F , seja $\text{hom}(F, G_n)$ o número de homomorfismos de F em G_n , ou seja, o número de mapeamentos $V(F) \rightarrow V(G_n)$ que preservam arestas. A densidade de homomorfismos é definida como

$$t(F, G_n) = \frac{\text{hom}(F, G_n)}{|V(G_n)|^{|V(F)|}}.$$

A densidade de homomorfismos também é definida por Lovász e Szegedy para grafos ponderados. Um grafo ponderado G é um grafo com laços e sem arestas múltiplas, onde cada vértice i possui um peso $\alpha_G(i)$ e cada aresta ij possui um peso $\beta_G(i, j)$. Seja α_G o peso total dos pesos nos vértices

$$\alpha_G = \sum_{i \in V(G)} \alpha_G(i).$$

Dado um grafo simples F e um mapeamento $\phi : V(F) \rightarrow V(G)$, sejam

$$\alpha_\phi = \sum_{u \in V(F)} \alpha_G(\phi(u)) \quad \text{e}$$

$$\text{hom}_\phi(F, G) = \prod_{uv \in E(F)} \beta_G(\phi(u), \phi(v)).$$

Com essas definições, Lovász e Szegedy estendem a noção de homomorfismo para grafos simples

F em grafos ponderados G , a saber, a *função de homomorfismo*

$$\text{hom}(F, G) = \sum_{\phi: V(F) \rightarrow V(G)} \alpha_{\phi} \text{hom}_{\phi}(F, G) \quad (3.1)$$

e a *densidade de homomorfismos*

$$t(F, G) = \frac{\text{hom}(F, G)}{\alpha_G^{|V(F)|}}. \quad (3.2)$$

Com isso, dizemos que a sequência de grafos ponderados (G_n) é *convergente* se $t(F, G_n)$ converge (existe o limite para $n \rightarrow \infty$), para todo grafo simples F . Claramente, basta supor que F é conexo.

Dizemos que uma sequência de grafos (G_n) *converge para um grafo ponderado* finito G se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t(F, G_n) = t(F, G), \text{ para todo grafo simples } F.$$

Por exemplo, dado $0 < p < 1$, a sequência $(G(n, p))$, $n \rightarrow \infty$, converge para o grafo que tem apenas um vértice com peso 1 e laço com peso p .

Outro exemplo é o modelo de grafo aleatório generalizado $G(n, H)$ de Lovász e Sós [45], onde H é um grafo ponderado com q vértices e $\alpha_H > 0$. $G(n, H)$ tem vértices em $[n]$ e é obtido da seguinte forma: $[n]$ é dividido em q partes V_1, \dots, V_q colocando u em V_i com probabilidade $\alpha_H(i)/\alpha_H$ e ligando $u \in V_i$ e $v \in V_j$ com probabilidade $\beta_H(i, j)$, independentemente. Lovász e Sós [45] provam que a sequência $(G(n, H))$, $n \rightarrow \infty$, converge para H .

No entanto, nem toda sequência *convergente* de grafos *converge para um grafo ponderado* finito. Por exemplo, Lovász e Szegedy provam que a sequência $H_{n,n}$ de “*half graphs*” é convergente, mas não converge para um grafo finito ponderado ($H_{n,n}$ é o grafo bipartido com partes $A = B = [n]$, onde $(a, b) \in A \times B$ é aresta se e só se $a \leq b$).

Apesar disso, Lovász e Szegedy provam a existência de um “objeto limite” para qualquer sequência convergente de grafos, a saber, uma função simétrica mensurável $W : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$, chamada “*graphon*”. *Graphons* podem ser vistos como grafos ponderados infinitos (ou matrizes de adjacências infinitas) com vértices no intervalo $[0, 1]$.

Para todo *graphon* W e todo grafo simples F com k vértices, Lovász e Szegedy estendem a

definição de $t(F, G)$ para densidade de homomorfismos de F em W como

$$t(F, W) = \int_{[0,1]^k} \prod_{ij \in E(F)} W(x_i, x_j) dx_1 \cdots dx_k.$$

Lovász e Szegedy provam então que toda sequência convergente de grafos (G_n) tem como limite um *graphon* $W : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t(F, G_n) = t(F, W), \text{ para todo grafo simples } F.$$

Note que W define todos os limites de densidade de homomorfismos. Note ainda que essa questão só é interessante para sequências de grafos densos, senão o limite acima seria 0 para todo grafo simples F com pelo menos uma aresta.

Não apresentaremos a prova deste resultado, disponível em [46], mas a seguiremos bem de perto em nossa prova de que existe um objeto limite $Z : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ para sequências convergentes de permutações, no Capítulo 4. A definição que daremos de convergência de permutações é similar a de grafos, ou seja, baseada em densidade de subpermutações que definiremos na Seção 4.2 para permutações de inteiros e depois estenderemos para “*permutações ponderadas*”, cuja definição também será dada.

Além disso, baseado em *graphons*, Lovász e Szegedy definem um modelo bastante geral de grafo aleatório, chamado “*grafo W -aleatório*”. Dado um *graphon* $W : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ e um inteiro $n > 0$, o grafo W -aleatório $G(n, W)$ com vértices em $[n]$ é gerado da seguinte forma: são gerados independentemente números X_1, \dots, X_n segundo a distribuição uniforme em $[0, 1]$ e os vértices i e j são ligados com probabilidade $W(X_i, X_j)$.

Este modelo é bastante geral e inclui o grafo aleatório $G(n, p)$ de Erdős e Rényi e o modelo generalizado $G(n, H)$ de Lovász e Sós, para H ponderado. Para $G(n, p)$, basta tomar o *graphon* com todos os valores $W(x, y) = p$, para $x, y \in [0, 1]$.

Para $G(n, H)$, onde H é ponderado com vértices em $[k]$ e supõe-se que α_H é igual a 1 (senão normalize os pesos dos vértices), basta tomar o *graphon* W_H montado da seguinte forma: para todo $x, y \in [0, 1]$, faça $W_H(x, y) = \beta_H(a, b)$, onde $a, b \in [k]$ são tais que

$$\alpha_H(1) + \cdots + \alpha_H(a-1) \leq x < \alpha_H(1) + \cdots + \alpha_H(a)$$

$$\alpha_H(1) + \cdots + \alpha_H(b-1) \leq y < \alpha_H(1) + \cdots + \alpha_H(b)$$

Lovász e Szegedy demonstram ainda que, dado um *graphon* $W : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$, a sequência $(G(n, W))$, $n \rightarrow \infty$ de grafos é convergente com probabilidade 1 e, além disso, o seu limite é o próprio *graphon* W .

Neste trabalho, propomos um modelo bastante geral de permutação aleatória, que chamaremos permutação Z -aleatória. Provamos ainda um resultado semelhante ao anterior na Seção 4.5 para permutações Z -aleatórias, usando técnicas muito semelhantes.

Lovász e Szegedy provam ainda que o modelo de grafo W -aleatório é bastante geral no seguinte sentido: suponha que, para todo $n > 1$, temos uma distribuição sobre grafos simples em $[n]$, ou seja, temos um variável aleatória G_n cujos valores são grafos simples em $[n]$. Claramente, para todo *graphon* W , $G(n, W)$ pode ser visto dessa forma.

O mais interessante é que todo modelo G_n que satisfaz as seguintes (e razoáveis) condições pode ser visto como um grafo W -aleatório para algum W :

- (a) A distribuição de G_n é invariante sobre diferentes rotulações dos vértices
- (b) Se removermos o vértice n , a distribuição de G_n é a mesma de G_{n-1}
- (c) Os subgrafos de G_n induzidos por $[k]$ e $\{k+1, \dots, n\}$ são variáveis aleatórias independentes, para todo $1 < k < n$.

Uma ferramenta fundamental utilizada por Lovász e Szegedy [46] é o Lema da Regularidade de Szemerédi. Eles se utilizam de uma versão fraca devida a Frieze e Kannan [34]. Informalmente, esta versão estabelece que, dado um grafo, obtém-se um grafo reduzido ponderado, cuja distância para o grafo original é tão pequena quanto se queira. Tanto grafo reduzido ponderado quanto esta noção de distância precisam ser definidas.

O grafo reduzido ponderado pode ser definido da seguinte forma. Dado um grafo G e uma partição equilibrada $P = (V_1, \dots, V_k)$ de $V = V(G)$, seja $Q : [k]^2 \rightarrow [0, 1]$ a matriz de densidades tal que $Q(i, j) = d_G(V_i, V_j)$, para todo $i, j \in [k]$. Seja $\mathcal{K}(P, Q)$ o grafo completo com vértices em V e laços em todos os vértices tal que o peso da aresta entre $u \in V_i$ e $v \in V_j$ é $Q(i, j)$.

A distância é definida da seguinte forma. Dados grafos ponderados G e G' com vértices em V , a

distância retangular (ou *cut norm*) entre G e G' é definida como (ver [46])

$$d_{\square}(G, G') = \frac{1}{n^2} \max_{S, T \subseteq V} \left| \sum_{(i, j) \in S \times T} (\beta_G(i, j) - \beta_{G'}(i, j)) \right|.$$

Assim, a versão fraca do lema da regularidade [34] estabelece que, para todo $\varepsilon > 0$, existe um inteiro $k(\varepsilon) > 0$ tal que, para todo grafo simples G , existe uma partição equilibrada \mathcal{P} de G em $k \leq k(\varepsilon)$ classes e uma matriz simétrica $Q : [k]^2 \rightarrow [0, 1]$ tal que

$$d_{\square}(G, \mathcal{K}(P, Q)) \leq \varepsilon.$$

Lovász e Szegedy [46] também estendem a noção de distância retangular para *graphons* $W, W' : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, a saber,

$$d_{\square}(W, W') = \sup_{A, B \subseteq [0, 1]} \left| \int_A \int_B (W(x, y) - W'(x, y)) dx dy \right|,$$

onde preferimos a notação $d_{\square}(W, W')$ ao invés de $\|W - W'\|_{\square}$ usada em [46].

Para poder aplicar esta versão fraca de regularidade, Lovász e Szegedy precisam estabelecer uma relação entre a distância retangular e a densidade de homomorfismos. É o que fazem em [46], a saber, para todos *graphons* W e W' e para todo grafo simples finito F , temos

$$\left| t(F, W) - t(F, W') \right| \leq |E(F)| \cdot d_{\square}(W, W'). \quad (3.3)$$

Como comentário final, nós seguimos esta mesma linha de raciocínio em nosso resultado sobre sequências de permutações, definindo “*permutação ponderada*”, definindo “*densidade de subpermutações*” em permutações ponderadas, definindo “*sequências convergentes*” de permutações, definindo uma “*distância retangular*” entre permutações ponderadas, depois estabelecendo uma relação semelhante a (3.3) entre “*densidade de subpermutações*” e “*distância retangular*” e finalmente estabelecendo uma versão fraca do Lema da Regularidade de Cooper para permutações (com nossa melhoria para partições equilibradas). Com isso, somos capazes de seguir boa parte da prova de Lovász e Szegedy para provar a existência do nosso “*objeto limite*” (que também definiremos) para sequências convergentes de permutações. É o que veremos no Capítulo 4 a seguir.

Capítulo 4

Limites de Sequências de Permutações

Dada uma permutação $\sigma : \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_n$, seja G_σ o grafo bipartido, definido na Seção 2.2, com partes (A, B) , $A = B = [n]$, onde $(a, b) \in A \times B$ é uma aresta se e só se $\sigma(a) < b$. A Figura 2.1 mostra um exemplo desse grafo. Seja $Q_\sigma : [n]^2 \rightarrow [0, 1]$ a matriz de adjacências bipartida de G_σ , que a partir de agora chamaremos simplesmente matriz de adjacências. Ou seja, $Q_\sigma(a, b) = 1$ se $(a, b) \in A \times B$ é uma aresta de G_σ e $Q_\sigma(a, b) = 0$, caso contrário. Como mencionado na Seção 2.2, o Teorema 12 é uma regularização de G_σ em intervalos $\mathcal{P} = (C_i)_{i=1}^k$ de \mathbb{Z}_n .

Dizemos que a matriz de densidades de \mathcal{P} é a matriz $Q_P : [k]^2 \rightarrow [0, 1]$ tal que $Q_P(i, j) = d(C_i, C_j)$. Como mostrado na Figura 2.3 com dois vértices adicionais, definiremos $Q_P(i, 0) = 0$ e $Q_P(i, k+1) = 1$ para todo $i \in [k]$. Essas matrizes de densidades possuem três características principais, mostradas no Lema 21 abaixo. Duas dessas características definirão o que chamaremos de permutação ponderada.

Definição 20. *Uma permutação ponderada é uma matriz $Q : [k]^2 \rightarrow [0, 1]$ que satisfaz:*

(a) $Q(i, j) \leq Q(i, j')$, para todos $i \in [k]$ e $j < j' \in [k]$ (ou seja, as linhas são não decrescentes)

(b) Para todo $j \in [k]$

$$j - 1 \leq \sum_{i=1}^k Q(i, j) \leq j$$

Para todo $i \in [k]$, defina $Q(i, 0) = 0$ e $Q(i, k+1) = 1$.

Lema 21 (Matrizes de densidades são permutações ponderadas). *Seja $k > 1$ e $n > 4k^2$. Dada uma permutação $\sigma : \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_n$ e uma partição $\mathcal{P} = (C_i)_{i=1}^k$ equilibrada de σ , temos que a matriz de densidades $Q_P : [k]^2 \rightarrow [0, 1]$ é uma permutação ponderada e satisfaz o seguinte: para todo $S \subset [k]$*

e $0 \leq a < b \leq k + 1$

$$\sum_{x \in S} \left(Q_P(x, b) - Q_P(x, a) \right) \leq b - a + 2 \quad (4.1)$$

Prova. A desigualdade 4.1 vem do fato de que $|\sigma(S) \cap [a, b]| \leq b - a + 1$. Se $a, b \in [k]$, considere os intervalos C_a e C_b de \mathcal{P} . Seja a' o menor elemento de C_a e b' o maior elemento de C_b . Com isso, $a' \geq (a - 1)\lfloor \frac{n}{k} \rfloor$ e $b' \leq b\lceil \frac{n}{k} \rceil$, onde n é o tamanho da permutação σ .

Logo, para todo $S \subset [k]$,

$$\begin{aligned} \sum_{x \in S} \left(e_{G_\sigma}(C_x, b') - e_{G_\sigma}(C_x, a') \right) &= \sum_{x \in S} \left| \sigma(C_x) \cap [a', b' - 1] \right| \\ &= \left| \bigcup_{x \in S} \sigma(C_x) \cap [a', b' - 1] \right| \leq b' - a' \leq b \lceil \frac{n}{k} \rceil - (a - 1) \lfloor \frac{n}{k} \rfloor \end{aligned}$$

Portanto, para $a, b \in [k]$,

$$\begin{aligned} \sum_{x \in S} \left(Q_P(x, b) - Q_P(x, a) \right) &= \sum_{x \in S} \left(d_{G_\sigma}(C_x, C_b) - d_{G_\sigma}(C_x, C_a) \right) \\ &\leq \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor^{-1} \sum_{x \in S} \left(e_{G_\sigma}(C_x, b') - e_{G_\sigma}(C_x, a') \right) \leq b - a + 1 + \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor^{-1} \end{aligned}$$

O mesmo vale para $a = 0$ ou $b = k_n + 1$, com pequenas diferenças. Isso prova a desigualdade 4.1.

A propriedade (a) de permutação ponderada sai diretamente da definição de Q_P e do grafo G_σ . A propriedade (b) de permutação ponderada é baseada na “massa” da permutação. Em toda permutação $\sigma : \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_n$, cada inteiro em $[n]$ tem que aparecer exatamente uma vez. Por exemplo, se $k = n$, cada parte de \mathcal{P} é um único vértice e Q_P é a matriz de adjacências de G_σ . Nesse caso, a soma das colunas de Q_P gera a coluna $(0, 1, 2, \dots, n - 1)$. Para o caso geral ($k < n$), a propriedade (b) afirma que a soma das linhas de Q_P é menor ou igual a $(1, 2, 3, \dots, k)$, como esperado, mas não pode ser tão pequeno: é maior que $(0, 1, 2, \dots, k - 1)$.

Para provar isso, note que

$$\sum_{i=1}^k Q_P(i, j) = \sum_{i=1}^k \frac{e_\sigma(C_i, C_j)}{|C_i||C_j|} = \frac{1}{|C_j|} \sum_{i=1}^k \frac{e_\sigma(C_i, C_j)}{|C_i|}$$

Seja J o menor índice de C_j . É fácil ver que

$$(j-1)\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor + 1 \leq J \leq (j-1)\left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil + 1.$$

$$(j-1)\left(\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor - 1\right) + 1 \leq J \leq (j-1)\left(\left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil + 1\right) + 1.$$

Note também que

$$\sum_{i=1}^k e_{\sigma}(C_i, C_j) = e_{\sigma}(\mathbb{Z}_n, C_j) = \sum_{h=J}^{J+|C_j|-1} (h-1) = \frac{|C_j|}{2}(J-1+J+|C_j|-2) = |C_j|\left(J + \frac{|C_j|-3}{2}\right)$$

Portanto, como $j \leq k \leq n/4k$, temos

$$\sum_{i=1}^k e_{\sigma}(C_i, C_j) \leq |C_j|\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor \left(j-1 + \frac{j}{\lfloor n/k \rfloor} + \frac{|C_j|-3}{2\lfloor n/k \rfloor}\right) \leq |C_j|\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor j$$

Da mesma forma, como $j \leq k \leq n/4k$, temos

$$\sum_{i=1}^k e_{\sigma}(C_i, C_j) \geq |C_j|\left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil \left(j-1 - \frac{(j-2)}{\lceil n/k \rceil} + \frac{|C_j|-3}{2\lceil n/k \rceil}\right) \geq |C_j|\left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil (j-1)$$

Finalmente,

$$\sum_{i=1}^k Q_P(i, j) = \frac{1}{|C_j|} \sum_{i=1}^k \frac{e_{\sigma}(C_i, C_j)}{|C_i|} \leq \frac{1}{|C_j|\lfloor \frac{n}{k} \rfloor} \sum_{i=1}^k e_{\sigma}(C_i, C_j) \leq \frac{1}{|C_j|\lfloor \frac{n}{k} \rfloor} |C_j|\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor j = j$$

$$\sum_{i=1}^k Q_P(i, j) = \frac{1}{|C_j|} \sum_{i=1}^k \frac{e_{\sigma}(C_i, C_j)}{|C_i|} \geq \frac{1}{|C_j|\lceil \frac{n}{k} \rceil} \sum_{i=1}^k e_{\sigma}(C_i, C_j) \geq \frac{1}{|C_j|\lceil \frac{n}{k} \rceil} |C_j|\left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil (j-1) = j-1$$

□

Observe que a restrição $n > 4k^2$ só é utilizada na propriedade (b) de permutação ponderada. A propriedade (a) e a desigualdade 4.1 valem irrestritamente.

Observe ainda que a matriz de adjacências $Q = Q_{\sigma}$ de qualquer permutação $\sigma : \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_n$ é uma

permutação ponderada: satisfaz (b), pois $\sum_{i=1}^k Q(i, j) = j - 1$. Também satisfaz (4.1) já que

$$\sum_{x \in S} (Q(x, b) - Q(x, a)) = \sigma(S) \cap [a, b - 1] \leq b - a.$$

A Figura 4.1 abaixo ilustra a matriz de adjacências da Figura 2.1 referente a permutação de inteiros (8, 6, 2, 7, 5, 3, 1, 4).

σ		1	2	3	4	5	6	7	8	y
8	1	0	0	0	0	0	0	0	0	
6	2	0	0	0	0	0	0	1	1	
2	3	0	0	1	1	1	1	1	1	
7	4	0	0	0	0	0	0	0	1	
5	5	0	0	0	0	0	1	1	1	
3	6	0	0	0	1	1	1	1	1	
1	7	0	1	1	1	1	1	1	1	
4	8	0	0	0	0	1	1	1	1	
x		0	1	2	3	4	5	6	7	soma

Figura 4.1: Matriz de adjacências do Grafo da permutação 8,6,2,7,5,3,1,4

A Figura 4.2 abaixo ilustra a matriz de densidades da Figura 2.2 referente a permutação de inteiros (8, 6, 2, 7, 5, 3, 1, 4) com partes de tamanho 2.

σ		1,2	3,4	5,6	7,8	y
8,6	1,2	0	0	0	0,5	
2,7	3,4	0	0,5	0,5	0,75	
5,3	5,6	0	0,25	0,75	1	
1,4	7,8	0,25	0,5	1	1	
x		0,25	1,25	2,25	3,25	soma

Figura 4.2: Matriz de densidades do Grafo da Figura 2.2

A Figura 4.3 abaixo ilustra a matriz de densidades da Figura 2.3 referente a permutação de inteiros (9, 6, 2, 7, 8, 5, 3, 1, 4).

4.1 Distância entre Permutações

Seja $I[n]$ o conjunto de todos os intervalos em $[n]$. Dada uma permutação $\sigma : \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_n$, Cooper define em [21] a discrepância $D(\sigma)$ como sendo

$$D(\sigma) = \max_{S, T \in I[n]} \left| |\sigma(S) \cap T| - \frac{|S||T|}{n} \right|$$

σ	1_2	3_4_5	6_7	8_9	γ
9_6	0	0	0,25	0,5	
2_7_8	0	0,33	0,33	0,83	
5_3	0	0,33	1	1	
1_4	0,25	0,67	1	1	
x	0,25	1,33	2,58	3,33	soma

Figura 4.3: Matriz de densidades do Grafo da Figura 2.3

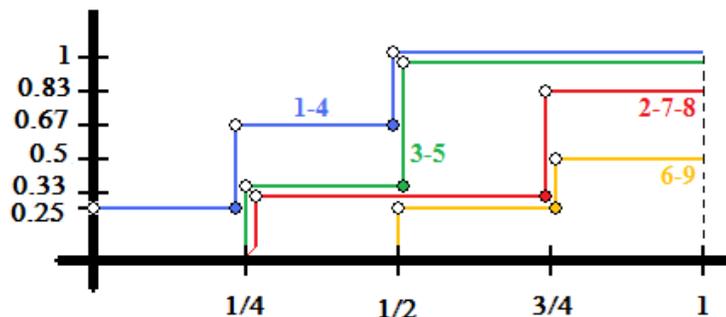


Figura 4.4: Fdas da Matriz na Figura 4.3 acima

Com isso, Cooper define sequências de permutações quase-aleatórias como sendo aquelas em que $D(\sigma_i) = o(n)$, como visto na Introdução. Cooper obtém ainda várias propriedades equivalentes a esta noção, como por exemplo estimando o número de subpermutações τ em σ , para dado τ .

Com isso, é razoável introduzirmos uma nova distância entre permutações, que vem se juntar a outras mais antigas, como a de Cayley, a de Ulam e outras mencionadas na Seção 4.7.

Definição 22 (Distância retangular entre permutações de inteiros). *Dadas duas permutações $\sigma_1, \sigma_2 : \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_n, n > 1$, definimos a distância retangular como*

$$d_{\square}(\sigma_1, \sigma_2) = \frac{1}{n} \max_{S, T \in I[n]} \left| |\sigma_1(S) \cap T| - |\sigma_2(S) \cap T| \right|$$

Sejam $G_1 = G_{\sigma_1}$ e $G_2 = G_{\sigma_2}$. Logo

$$d_{\square}(\sigma_1, \sigma_2) = \frac{1}{n} \max_{\substack{S \in I[n] \\ a < b \in [n]}} \left| \left(e_{G_1}(S, b) - e_{G_1}(S, a) \right) - \left(e_{G_2}(S, b) - e_{G_2}(S, a) \right) \right|$$

Como $e_G(S, a) = \sum_{x \in S} e_G(x, a)$, podemos reescrever essa equação usando as matrizes de adjacências Q_1 e Q_2 de σ_1 e σ_2 . É o que vemos na equação 4.2 abaixo. Com isso, é razoável estender a definição de distância retangular para permutações ponderadas usando essa mesma equação.

Definição 23 (Distância retangular entre permutações ponderadas). *Dadas permutações ponderadas $Q_1, Q_2 : [n]^2 \rightarrow [0, 1]$, definimos a distância retangular entre Q_1 e Q_2 como*

$$d_{\square}(Q_1, Q_2) = \frac{1}{n} \max_{\substack{S \subseteq [n] \\ a < b \in [n]}} \left| \sum_{x \in S} \left((Q_1(x, b) - Q_1(x, a)) - (Q_2(x, b) - Q_2(x, a)) \right) \right| \quad (4.2)$$

Como mencionado no Capítulo 3, usaremos essa noção de distância para obter uma versão fraca do lema da regularidade.

Dada uma k -partição equilibrada $P = (C_i)_{i=1}^k$ de $\sigma : \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_n$ e uma matriz $Q : [k]^2 \rightarrow [0, 1]$, seja $\mathcal{K}(P, Q) : [n]^2 \rightarrow [0, 1]$ a matriz cujo valor na posição (x, y) , onde $x \in C_i$ e $y \in C_j$, $i, j \in [k]$, é igual a $Q(i, j)$, para todo $x, y \in [n]$.

Teorema 24 (Regularidade fraca para permutações). $\forall \varepsilon, m, \exists n_0, M$ tais que, se $n \geq n_0$, toda permutação $\sigma : \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_n$ possui uma k -partição equilibrada $P = (C_i)_{i=1}^k$ com matriz de densidades $Q : [k]^2 \rightarrow [0, 1]$, tal que $m \leq k \leq M$ e

$$d_{\square}(Q_{\sigma}, \mathcal{K}(P, Q)) \leq \varepsilon$$

Nós dizemos que P é uma k -partição *fraca* ε -regular.

Prova. Aplique o Teorema 12 com valores ε e $\max\{m, 8/\varepsilon^2\}$. O Teorema 12 retorna n'_0 e M . Tome $n_0 = \max\{n'_0, 5M^2\}$.

Tome $n \geq n_0$ e $\sigma : \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_n$. Seja $\mathcal{P} = (C_i)_{i=1}^k$ a k -partição de σ e seja Q sua matriz de densidades. Pelo Lema 21, Q é uma permutação ponderada (condições (a) e (b)) e satisfaz (4.1). Seja $Q_1 = Q_{\sigma}$ e $Q_2 = \mathcal{K}(P, Q)$.

Tome um intervalo $S \subset \mathbb{Z}_n$ e pontos $a < b \in [n]$. Se $|S| \leq \varepsilon n$, então

$$\left| \sum_{x \in S} \left((Q_1(x, b) - Q_1(x, a)) - (Q_2(x, b) - Q_2(x, a)) \right) \right| \leq \varepsilon n$$

Considere então que $|S| > \varepsilon n$. Sejam $A < B \in [k]$ tais que $a \in C_A$ e $b \in C_B$. Desejamos estimar $|d(S, \{a\}) - d(S, C_A)|$.

Sejam n_L, n_E, n_D o número de elementos de $\sigma(S)$, respectivamente, à esquerda de C_A , à esquerda de $\{a\}$ em C_A , e à direita de $\{a\}$ em C_A .

Com isso, temos que

$$\begin{aligned} (n_L + n_E) &\leq e_\sigma(S, \{a\}) \leq (n_L + n_E + 1) \\ (n_L)|C_A| &\leq e_\sigma(S, C_A) \leq (n_L + n_E + 1 + n_D)|C_A| \end{aligned}$$

Dividindo o primeiro por $|S|$ e o segundo por $|S| \cdot |C_A|$, temos

$$-(n_D + 1)/|S| \leq d(S, \{a\}) - d(S, C_A) \leq (n_E + 1)/|S|$$

Como n_E e n_D são menores que $|C_A| < 2n/k$, $k > 8/\varepsilon^2$ e $|S| \geq \varepsilon n$, temos

$$|d(S, \{a\}) - d(S, C_A)| \leq |C_A|/|S| \leq 2/k\varepsilon \leq \varepsilon/4.$$

Analogamente

$$|d(S, \{b\}) - d(S, C_B)| \leq \varepsilon/4.$$

Note ainda que

$$\sum_{x \in S} Q_1(x, a) = e_\sigma(S, \{a\}) = |S| \cdot d(S, \{a\})$$

e que

$$\begin{aligned} \sum_{x \in S} Q_2(x, a) &= \sum_{i=1}^k \sum_{x \in C_i \cap S} Q_2(x, a) = \sum_{i=1}^k \sum_{x \in C_i \cap S} d(C_i, C_A) = \sum_{i=1}^k |C_i \cap S| \cdot d(C_i, C_A) \\ &= \sum_{i=1}^k |C_i \cap S| \cdot d(C_i \cap S, C_A) + \sum_{q \in \{L, R\}} |C_q \cap S| \cdot \left(d(C_q, C_A) - d(C_q \cap S, C_A) \right), \end{aligned}$$

onde $L < R \in [k]$ são tais que C_L e C_R são os intervalos da partição, respectivamente, mais à

esquerda e mais à direita, que tem interseção não vazia com S . Analogamente

$$\sum_{x \in S} Q_2(x, b) = |S| \cdot d(S, C_B) + \sum_{q \in \{L, R\}} |C_q \cap S| \cdot \left(d(C_q, C_B) - d(C_q \cap S, C_B) \right)$$

Como $|C_L \cap S| \leq |C_L| \leq (n+1)/k$, temos

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n} \left| \sum_{x \in S} \left((Q_1(x, b) - Q_1(x, a)) - (Q_2(x, b) - Q_2(x, a)) \right) \right| \leq \\ & \leq \left| (d(S, \{b\}) - d(S, C_B)) - (d(S, \{a\}) - d(S, C_A)) \right| + \frac{3}{k} \leq \varepsilon \end{aligned}$$

□

O lema abaixo é simples e será útil posteriormente.

Lema 25. *Seja $k > 1$ e $n > 4k^2$. Seja $P = (C_i)_{i=1}^k$ uma k -partição equilibrada de \mathbb{Z}_n . Sejam $Q_1, Q_2 : [k]^2 \rightarrow [0, 1]$ permutações ponderadas. Sejam $Q_1^* = \mathcal{K}(P, Q_1)$ e $Q_2^* = \mathcal{K}(P, Q_2)$. Logo Q_1^* e Q_2^* são permutações ponderadas e*

$$d_{\square}(Q_1^*, Q_2^*) = d_{\square}(Q_1, Q_2) \pm \frac{3}{k}$$

Prova. É fácil ver que $\mathcal{K}(P, Q_1)$ satisfaz as condições (a) e (b) da definição de permutação ponderada. Além disso, dado $S^* \in [n]$, $x \in S^*$ e $a < b \in [n]$, sejam S_i^*, X, A e B tais que $S_i^* = S^* \cap C_i$, $x \in C_X$, $a \in C_A$ e $b \in C_B$. Com isso, temos

$$\begin{aligned} d_{\square}(Q_1^*, Q_2^*) &= \frac{1}{n} \max_{\substack{S^* \in I[n] \\ a < b \in [n]}} \left| \sum_{x \in S^*} \left((Q_1^*(x, b) - Q_1^*(x, a)) - (Q_2^*(x, b) - Q_2^*(x, a)) \right) \right|, \\ &= \frac{1}{n} \max_{\substack{S^* \in I[n] \\ a < b \in [n]}} \left| \sum_{X \in [k]} \sum_{x \in S_X^*} \left((Q_1(X, B) - Q_1(X, A)) - (Q_2(X, B) - Q_2(X, A)) \right) \right| \\ &= \frac{1}{n} \max_{\substack{S^* \in I[n] \\ A < B \in [k]}} \left| \sum_{X \in [k]} |S_X^*| \cdot \left((Q_1(X, B) - Q_1(X, A)) - (Q_2(X, B) - Q_2(X, A)) \right) \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{n} \max_{\substack{S \in I[k] \\ A < B \in [k]}} \left| \sum_{X \in S} \left(\frac{n}{k} \pm 1 \right) \cdot \left((Q_1(X, B) - Q_1(X, A)) - (Q_2(X, B) - Q_2(X, A)) \right) \right| \pm \frac{1}{n} \cdot \left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil \cdot 1 \\
&= \frac{1}{k} \max_{\substack{S \in I[k] \\ A < B \in [k]}} \left| \sum_{X \in S} \left((Q_1(X, B) - Q_1(X, A)) - (Q_2(X, B) - Q_2(X, A)) \right) \right| \pm \frac{2}{k} + \frac{1}{n}k \\
&= d_{\square}(Q_1, Q_2) \pm \frac{3}{k}, \text{ pois } k/n < 1/4k.
\end{aligned}$$

□

Falta-nos definir a densidade de subpermutações em uma permutação ponderada e estabelecer uma relação entre ela e a distância retangular.

4.2 Densidade de Subpermutações

Seja σ uma permutação em \mathbb{Z}_n e τ uma permutação em \mathbb{Z}_m , $m < n$.

Definição 26 (Densidade de subpermutações em permutação de inteiros). *Definimos o número de subpermutações $\Lambda(\tau, \sigma)$ de τ em σ como o número de m -uplas $\{x_1 < x_2 < \dots < x_m\} \subset \mathbb{Z}_n$ tais que $\sigma(x_i) < \sigma(x_j)$ se e só se $\tau(i) < \tau(j)$. Definimos a densidade de subpermutações de τ em σ como*

$$t(\tau, \sigma) = \binom{n}{m}^{-1} \Lambda(\tau, \sigma)$$

Definição 27 (Sequência convergente de permutações). *Dizemos que uma sequência (σ_i) de permutações $\sigma_i : \mathbb{Z}_{n_i} \rightarrow \mathbb{Z}_{n_i}$ ($n_i \rightarrow \infty$) é convergente se para toda permutação τ a sequência $(t(\tau, \sigma_i))$ converge.*

Seja $Q : [n]^2 \rightarrow [0, 1]$ a matriz de adjacências de $\sigma : \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_n$ como definido no início do capítulo. Por definição, Q possui apenas valores 0 ou 1, e $Q(x, a) = 1$ se e só se $\sigma(x) < a$, $x, a \in [n]$. Com isso, para $a < n$, $\sigma(x) = a$ se e só se $Q(x, a) = 0$ e $Q(x, a + 1) = 1$.

Ou seja, $\sigma(x) = a$ se e só se $Q(x, a + 1) - Q(x, a) = 1$, onde já convenciamos que $Q(x, 0) = 0$ e $Q(x, n + 1) = 1$. Com isso, é fácil ver que, dado $\tau : \mathbb{Z}_m \rightarrow \mathbb{Z}_m$, $m < n$, se Q é a matriz de adjacências

de $\sigma : \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_n$, então

$$t(\tau, \sigma) = \binom{n}{m}^{-1} \sum_{X \in [n]_o^m} \sum_{A \in [n+1]_o^m} \prod_{i=1}^m \left(Q(x_i, a_{\tau(i)}) - Q(x_i, a_{\tau(i)} - 1) \right),$$

onde $[n]_o^m$ é o conjunto dos elementos de $[n]^m$ cujas coordenadas estão em ordem crescente. Ou seja, $X = (x_1 < \dots < x_n)$ e $A = (a_1 < \dots < a_n)$.

Assim podemos estender a definição de densidade de subpermutação para permutações ponderadas.

Definição 28 (Densidade de subpermutações em permutação ponderada). *Dada uma permutação ponderada $Q : [k]^2 \rightarrow [0, 1]$ e uma permutação $\tau : \mathbb{Z}_m \rightarrow \mathbb{Z}_m$, $m < k$, definimos a densidade de subpermutações de τ em Q como*

$$t(\tau, Q) = \binom{k}{m}^{-1} \sum_{X \in [k]_o^m} \sum_{A \in [k+1]_o^m} \prod_{i=1}^m \left(Q(x_i, a_{\tau(i)}) - Q(x_i, a_{\tau(i)} - 1) \right). \quad (4.3)$$

Da observação acima, temos que $t(\tau, \sigma) = t(\tau, Q_\sigma)$. O seguinte lema relaciona a distância retangular e a densidade de subpermutações. O Lema 51 é quase idêntico a este e ocorre quando tomamos n tendendo ao infinito no lema abaixo, ao invés de supor apenas $n > 2m$.

Lema 29 (Densidade de subpermutações \times Distância retangular). *Fixe uma permutação $\tau : \mathbb{Z}_m \rightarrow \mathbb{Z}_m$ qualquer. Seja $n > 2m$. Então, dadas duas permutações ponderadas $Q_1, Q_2 : [n]^2 \rightarrow [0, 1]$, temos*

$$|t(\tau, Q_1) - t(\tau, Q_2)| \leq 2m^2 \cdot d_{\square}(Q_1, Q_2)$$

Prova. Seja

$$\Delta T = \binom{n}{m} \left| t(\tau, Q_1) - t(\tau, Q_2) \right|.$$

Dado $X = (x_1, \dots, x_m) \in [n]_o^m$ e $A = (a_1, \dots, a_m) \in [n]_o^m$, sejam

$$Y_1(i) = \left(Q_1(x_i, a_{\tau(i)}) - Q_1(x_i, a_{\tau(i)} - 1) \right) \text{ e}$$

$$Y_2(i) = \left(Q_2(x_i, a_{\tau(i)}) - Q_2(x_i, a_{\tau(i)} - 1) \right).$$

Assim, de (4.3), temos

$$\begin{aligned} \Delta T &= \left| \sum_{X \in [n]_o^m} \sum_{A \in [n+1]_o^m} \left(\prod_{i=1}^m Y_1(i) - \prod_{i=1}^m Y_2(i) \right) \right| \\ &= \left| \sum_{X \in [n]_o^m} \sum_{A \in [n+1]_o^m} \sum_{i=1}^m \left(Y_1(i) - Y_2(i) \right) \prod_{u=1}^{i-1} Y_1(u) \prod_{v=i+1}^m Y_2(v) \right| \end{aligned}$$

Seja $X_{(i)} \in [n]_o^{m-1}$ formado de X sem a coordenada x_i . Seja $A_{(i)} \in [n]_o^{m-1}$ formado de A sem a coordenada $a_{\tau(i)}$. Ou seja, $X_{(i)} = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_m)$ e $A_{(i)} = (a_1, \dots, a_{\tau(i)-1}, a_{\tau(i)+1}, \dots, a_m)$, onde convencionamos que $x_0 = 0$, $x_{m+1} = n + 1$, $a_0 = 0$ e $a_{m+1} = n + 1$. Assim

$$\begin{aligned} \Delta T &= \left| \sum_{i=1}^m \sum_{X_{(i)} \in [n]_o^{m-1}} \sum_{x_i=x_{i-1}+1}^{x_{i+1}-1} \sum_{A_{(i)} \in [n+1]_o^{m-1}} \sum_{a_{\tau(i)}=a_{\tau(i)-1}+1}^{a_{\tau(i)+1}-1} \left(Y_1(i) - Y_2(i) \right) \prod_{u=1}^{i-1} Y_1(u) \prod_{v=i+1}^m Y_2(v) \right|, \\ &\leq \sum_{i=1}^m \sum_{X_{(i)} \in [n]_o^{m-1}} \sum_{A_{(i)} \in [n+1]_o^{m-1}} \prod_{u=1}^{i-1} Y_1(u) \prod_{v=i+1}^m Y_2(v) \cdot \left| \sum_{x_i=x_{i-1}+1}^{x_{i+1}-1} \sum_{a_{\tau(i)}=a_{\tau(i)-1}+1}^{a_{\tau(i)+1}-1} \left(Y_1(i) - Y_2(i) \right) \right| \end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned} \sum_{a_{\tau(i)}=a_{\tau(i)-1}+1}^{a_{\tau(i)+1}-1} \left(Y_1(i) - Y_2(i) \right) &= \left(Q_1(x_i, a_{\tau(i)+1} - 1) - Q_1(x_i, a_{\tau(i)-1}) \right) - \\ &\quad - \left(Q_2(x_i, a_{\tau(i)+1} - 1) - Q_2(x_i, a_{\tau(i)-1}) \right), \end{aligned}$$

Portanto, segue de (4.2) que

$$\begin{aligned} \Delta T &\leq \sum_{i=1}^m \sum_{X_{(i)} \in [n]_o^{m-1}} \sum_{A_{(i)} \in [n+1]_o^{m-1}} \prod_{u=1}^{i-1} Y_1(u) \prod_{v=i+1}^m Y_2(v) \left(d_{\square}(Q_1, Q_2) \cdot n \right) \\ &= d_{\square}(Q_1, Q_2) \cdot n \sum_{i=1}^m \sum_{X_{(i)} \in [n]_o^{m-1}} \sum_{A_{(i)} \in [n+1]_o^{m-1}} \prod_{u=1}^{i-1} Y_1(u) \prod_{v=i+1}^m Y_2(v) \end{aligned}$$

Note ainda que

$$\sum_{A_{(i)} \in [n+1]_o^{m-1}} \prod_{u=1}^{i-1} Y_1(u) \prod_{v=i+1}^m Y_2(v) \leq 1,$$

pois podemos eliminar variável após variável de $A_{(i)}$ colocando as demais em evidência, como, por exemplo,

$$\sum_{A_{(i)} \in [n+1]_o^{m-1}} \prod_{u=1}^{i-1} Y_1(u) \prod_{v=i+1}^m Y_2(v) = \sum_{A'_{(i)} \in [n+1]_o^{m-2}} \prod_{u=1}^{i-1} Y_1(u) \prod_{v=i+1}^{m-1} Y_2(v) \sum_{a_{\tau(m)}=a_{\tau(m)-1}+1}^{a_{\tau(m)+1}-1} Y_2(m)$$

onde $A'_{(i)} \in [n+1]_o^{m-2}$ é formado de $A_{(i)} \in [n+1]_o^{m-1}$ sem a coordenada $a_{\tau(m)}$, supondo, para facilitar a notação, sem perda de generalidade, que $i \notin [\tau(m) - 1, \tau(m) + 1]$, e

$$\sum_{a_{\tau(m)}=a_{\tau(m)-1}+1}^{a_{\tau(m)+1}-1} Y_2(m) = \left(Q_2(x_m, a_{\tau(m)+1} - 1) - Q_2(x_m, a_{\tau(m)-1}) \right) \leq 1.$$

Portanto

$$\Delta T \leq d_{\square}(Q_1, Q_2) \cdot n \cdot m \cdot \binom{n}{m-1}$$

Dividindo por $\binom{n}{m}$ e tomando $n > 2m$, temos

$$\left| t(\tau, Q_1) - t(\tau, Q_2) \right| \leq d_{\square}(Q_1, Q_2) \cdot n \cdot m \cdot \frac{m}{n - m + 1} \leq 2m^2 \cdot d_{\square}(Q_1, Q_2)$$

□

4.3 Objeto Limite das Permutações

O Lema 30 abaixo é quase idêntico ao Lema 5.1 de Lovász e Szegedy em [46]. Grosso modo, ele afirma que, dada uma sequência qualquer de permutações de inteiros, existe uma sequência de permutações ponderadas, todas relacionadas entre si, que representam bem a sequência de permutações.

Lema 30. *Toda sequência de permutações $(\sigma_n : n = 1, 2, \dots)$ possui uma subsequência $(\sigma'_m : m = 1, 2, \dots)$ para a qual existe uma sequência $(k_m : m = 1, 2, \dots)$ de inteiros e uma sequência $(Q_m : m = 1, 2, \dots)$ de matrizes com as seguintes propriedades:*

- (i) $Q_m : [k_m]^2 \rightarrow [0, 1]$ é uma permutação ponderada que satisfaz o Lema 21
- (ii) Se $j < m$, então $k_j | k_m$ e $Q_j = \widehat{Q}_{m,j}$, onde $\widehat{Q}_{m,j}$ é a matriz obtida de Q_m agrupando seus valores em k_j blocos consecutivos de tamanho k_m/k_j e substituindo cada bloco por apenas um valor, que é a média aritmética daquele bloco.
- (iii) Para todo $j < m$, σ'_m tem uma k_j -partição $\mathcal{P}_{m,j}$ fraca $(1/m)$ -regular com matriz $k_j \times k_j$ de densidades $Q_{m,j}$ tal que

$$d_{\square}(Q_{m,j}, Q_j) < 1/j$$

e, para $1 \leq i < j \leq m$, $\mathcal{P}_{m,j}$ é um refinamento de $\mathcal{P}_{m,i}$.

Prova. Para todo inteiro $m \geq 1$, nós construiremos uma subsequência (σ_n^m) , onde todas permutações possuem uma k_m -partição $\mathcal{P}_{n,m}$ fraca $(1/m)$ -regular cujas matrizes de densidades são próximas.

A primeira sequência (σ_n^1) é a própria sequência (σ_n) . Tome $k_1 = 1$. Para toda permutação σ_n^1 , seja $\mathcal{P}_{n,1} = (\mathbb{Z}_n)$ a partição em apenas um bloco e seja $Q_{n,1}$ a matriz $k_1 \times k_1$ tal que $Q_{n,1}(1, 1) = 1/2$.

Suponha que, para algum $m > 0$, nós construímos a sequência (σ_n^m) . Construiremos a sequência (σ_n^{m+1}) fazendo-a inicialmente igual a (σ_n^m) . Para toda permutação σ_n^m , tome uma K_n -partição $\mathcal{P}_{n,m+1}$ fraca $1/(m+1)$ -regular com matriz de densidades $Q_{n,m+1}$. Nós podemos tomar esta partição de forma a refinar a partição anterior $\mathcal{P}_{n,m}$ e de forma que cada intervalo de $\mathcal{P}_{n,m}$ seja dividido no mesmo número de intervalos $r_{n,m}$. K_n é limitado, independente de n , pois m é fixo, e também $r_{n,m}$ é limitado. Podemos então filtrar a sequência (σ_n^{m+1}) de forma que suas permutações tenham o mesmo $r_m = r_{n,m}$. Tome $k_{m+1} = k_m r_m$.

Além disso, como $[0, 1]$ é sequencialmente compacto, podemos filtrar (σ_n^{m+1}) para uma subsequência tal que as matrizes $k_{m+1} \times k_{m+1}$ de densidades $Q_{n,m+1}$ converjam ($n \rightarrow \infty$) para uma matriz $k_{m+1} \times k_{m+1}$ de densidades Q_{m+1} .

É fácil ver que Q_{m+1} satisfaz as propriedades do Lema 21, para $m = 0, 1, \dots$, pois, para $n > 4k_m^2$, cada matriz $Q_{n,m+1}$ satisfaz essas propriedades.

Finalmente, removemos da sequência (σ_n^{m+1}) todas as permutações σ_i^{m+1} tais que $d_{\square}(Q_{i,m+1}, Q_{m+1}) > 1/(2m+2)$. Renumerando os índices, nós obtemos a subsequência (σ_n^{m+1}) .

Tome $\sigma'_m = \sigma_1^m$. A permutação σ'_m possui uma sequência de partições $\mathcal{P}_{m,j}$, para todo $1 \leq j < m$, tal que $\mathcal{P}_{m,j}$ possui k_j intervalos de tamanho quase iguais e possui uma matriz $k_j \times k_j$ de densidades

$Q_{m,j}$ tal que $Q_{m,j} \rightarrow Q_j$ ($m \rightarrow \infty$) e $d_{\square}(Q_{m,j}, Q_{m',j}) < 1/j$, para todo $m, m' > j$.

Para uma permutação fixa σ'_m , as partições $\mathcal{P}_{m,1}, \mathcal{P}_{m,2}, \dots, \mathcal{P}_{m,m}$ são sucessivamente refinamentos umas das outras. Nós podemos assumir que os intervalos estão rotulados de forma que o i -ésimo intervalo de $\mathcal{P}_{m,j+1}$ é a união dos intervalos consecutivos $(i-1)r_m + 1, \dots, ir_m$.

Seja $\widehat{Q}_{m,j}$, $1 \leq j \leq m$, a matriz de densidades $k_j \times k_j$ obtida de Q_m agrupando seus valores em k_j intervalos consecutivos de tamanho k_m/k_j e substituindo cada bloco de intervalos por apenas um valor, que é a média daquele bloco. Como o tamanho das permutações tendem ao infinito e os intervalos em $\mathcal{P}_{m,j}$ tem todos quase o mesmo tamanho, segue que

$$Q_{n,j}(a, b) \rightarrow \frac{1}{(k_m/k_j)} \sum_{x=(a-1)(k_m/k_j)+1}^{a(k_m/k_j)} \sum_{y=(b-1)(k_m/k_j)+1}^{b(k_m/k_j)} Q_{n,m}(x, y),$$

para todo $1 \leq j < m$, $i \in [k_j]$, onde $n \rightarrow \infty$.

Como $Q_{n,j}(a, b) \rightarrow Q_j(a, b)$ e $Q_{n,m}(x, y) \rightarrow Q_m(x, y)$, para todo $j \in [k_j]$ e $x, y \in [k_m]$, segue que, para todo $a, b \in [k_j]$,

$$Q_{n,j}(a, b) \rightarrow Q_j(a, b), \text{ e}$$

$$Q_{n,j}(a, b) \rightarrow \widehat{Q}_{m,j}(a, b),$$

Logo $Q_j = \widehat{Q}_{m,j}$, satisfazendo o enunciado. \square

Para os dois próximos lemas, considere a seguinte configuração:

Configuração 31. Seja (k_m) uma sequência de inteiros e (Q_m) uma sequência de permutações ponderadas $Q_m : [k_m]^2 \rightarrow [0, 1]$ satisfazendo as condições (i) e (ii) do Lema 30. Seja $\phi_m : (0, 1] \rightarrow [k_m]$ a função que mapeia o intervalo $((i-1)/k_m, i/k_m]$ no inteiro i .

Dadas sequências de variáveis aleatórias (X_i) e (Y_i) , dizemos que (X_i) forma um martingal [27] com relação a (Y_i) se (ver também Definição 68)

$$E(X_{m+1} \mid Y_1, \dots, Y_m) = X_m$$

O Lema 32 é idêntico ao Lema 5.3 de Lovász e Szegedy em [46].

Lema 32. *Considere a Configuração 31 e sejam X e Y duas variáveis aleatórias uniformes e independentes em $(0, 1]$. Então $(Q_m(\phi_m(X), \phi_m(Y)))$, $m = 1, 2, \dots$, forma um martingal.*

Prova. Sabendo o valor de $\phi_m(X)$, sabem-se os valores de $\phi_1(X), \dots, \phi_{m-1}(X)$. Com isso, basta mostrar que

$$E\left(Q_{m+1}(\phi_{m+1}(X), \phi_{m+1}(Y)) \mid \phi_m(X), \phi_m(Y)\right) = Q_m(\phi_m(X), \phi_m(Y)), \text{ ou}$$

$$E\left(Q_{m+1}(\phi_{m+1}(X), \phi_{m+1}(Y)) \mid \phi_m(X) = i, \phi_m(Y) = j\right) = Q_m(i, j)$$

A condição “ $\phi_m(X) = i$ ” força X a ser uniforme no intervalo $[(i-1)/k_m, i/k_m]$ e portanto $\phi_{m+1}(X)$ é um inteiro uniforme no intervalo $[(i-1)(k_{m+1}/k_m), i(k_{m+1}/k_m)]$. Logo $Q_{m+1}(\phi_{m+1}(X), \phi_{m+1}(Y))$ é uniformemente distribuído e obtido dos valores de Q_m contidos no seguinte par de intervalos $[(i-1)(k_{m+1}/k_m), i(k_{m+1}/k_m)] \times [(j-1)(k_{m+1}/k_m), j(k_{m+1}/k_m)]$.

Ou seja,

$$E\left(Q_{m+1}(\phi_{m+1}(X), \phi_{m+1}(Y)) \mid \phi_m(X) = i, \phi_m(Y) = j\right) = \widehat{Q}_{m+1,m}(i, j)$$

Do Lema 30 (ii), temos $\widehat{Q}_{m+1,m}(i, j) = Q_m(i, j)$, e portanto

$$E\left(Q_{m+1}(\phi_{m+1}(X), \phi_{m+1}(Y)) \mid \phi_m(X) = i, \phi_m(Y) = j\right) = Q_m(i, j)$$

□

Definição 33. *Considerando a Configuração 31, seja $Z_{Q_m} : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ a função que leva todo $(x, y) \in [0, 1]^2$ a um valor $Z_{Q_m}(x, y)$ em $[0, 1]$ da seguinte forma:*

$$Z_{Q_m}(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{se } y = 0, \\ \lceil k_m y \rceil / k_m, & \text{se } x = 0, \\ Q_m(\phi_m(x), \phi_m(y)), & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Já foi observado no Lema 21 que as colunas das permutações ponderadas Q são não decrescentes. Com isso, temos que as colunas de Z_Q , ou seja, $Z_Q(x, \cdot)$ para qualquer $x \in [0, 1]$, formam fdas (funções

de distribuição acumulada) no intervalo $[0, 1]$, já que a definição de ϕ_m garante a continuidade à esquerda para todo $x \in (0, 1]$. A definição formal de fda se encontra na Seção A.1. São não-decrescentes, contínuas à esquerda em $(0, 1]$ e valem 0 no ponto 0.

Nos próximos lemas, serão necessários alguns conhecimentos básicos de probabilidade, que poderão ser vistos mais detalhadamente na Seção A.1 ou em [44] (cap.IV). Primeiramente, diz-se que uma sequência de fdas (F_n) converge fracamente (*weak convergence*) para uma fda F (ou simplesmente $F_n \xrightarrow{w} F$) se $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = F(x)$ para todo $x \in [0, 1]$ onde F é contínua. Sabe-se também que o conjunto dos pontos de descontinuidade de qualquer fda é um conjunto enumerável.

Lema 34. *Seja (Q_m) uma sequência de matrizes $Q_m : [k_m]^2 \rightarrow [0, 1]$, $m > 0$, tal que $Q_m(i, j) \leq Q_m(i, j')$, para todos $i \in [k_m]$ e $j < j' \in [k_m]$. Suponha que, para quase todo $x, y \in [0, 1]$, $Z_{Q_m}(x, y)$ converge ($m \rightarrow \infty$). Então existe uma função $Z : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ mensurável tal que, para todo $x \in [0, 1]$, $Z(x, \cdot)$ é uma fda e satisfaz o seguinte:*

- (a) $Z_{Q_m}(x, y) \rightarrow Z(x, y)$, para quase todo $(x, y) \in [0, 1]^2$.
- (b) $Z_{Q_m}(x, \cdot) \xrightarrow{w} Z(x, \cdot)$, para quase todo $x \in [0, 1]$.

Prova. Pelo enunciado, para quase todo (x, y) , existe

$$Z(x, y) = \lim_{m \rightarrow \infty} Z_{Q_m}(x, y).$$

Consequentemente, para quase todo $y \in [0, 1]$, $Z_{Q_m}(x, y)$ converge para quase todo $x \in [0, 1]$.

Ou seja, existe $\Delta \subset [0, 1]$ de medida nula tal que, se $y \in [0, 1] \setminus \Delta$, então existe $\Gamma_y \subset [0, 1]$ de medida nula tal que, se $x \in [0, 1] \setminus \Gamma_y$, então $Z_{Q_m}(x, y)$ converge.

Como $[0, 1]$ é separável (possui um subconjunto denso enumerável) e separabilidade é hereditária para espaços métricos (Corolário 83 da Seção A.1), temos que $[0, 1] \setminus \Delta$ é separável.

Seja Ψ um subconjunto denso enumerável de $[0, 1] \setminus \Delta$. Claramente, Ψ tem medida nula (pois é enumerável) e também é denso em $[0, 1]$ (pois Δ tem medida nula). Seja $\Gamma_\Psi = \bigcup_{y \in \Psi} \Gamma_y$. Claramente Γ_Ψ também tem medida nula, pois é uma união enumerável de conjuntos de medida nula.

Com isso, para todo $x \in [0, 1] \setminus \Gamma_\Psi$, $Z_{Q_m}(x, y) \rightarrow Z(x, y)$ para $y \in \Psi$. Como as colunas de Q_m são não decrescentes, temos que, para quase todo $x \in [0, 1]$, $Z_{Q_m}(x, \cdot)$ é uma sequência de fdas que converge pontualmente em um conjunto Ψ denso em $[0, 1]$.

Segue então do Fato 76 da Seção A.1 que, para todo $x \in [0, 1] \setminus \Gamma_\Psi$, $(Z_{Q_m}(x, \cdot))$, $m \rightarrow \infty$, é uma sequência de fdas que converge fracamente em $[0, 1]$.

Fixe $x \in [0, 1] \setminus \Gamma_\Psi$. Pelo Fato 75 da Seção A.1, o limite da convergência fraca é único [44]. Seja então $F_x(\cdot)$ a fda tal que $Z_{Q_m}(x, \cdot) \xrightarrow{w} F_x(\cdot)$, $m \rightarrow \infty$. Tome $y \in [0, 1]$. Se $(Z_{Q_m}(x, y))$, $m \rightarrow \infty$, converge, então o limite é $Z(x, y)$, pela própria definição de Z (ou seja, $F_x(y) = Z(x, y)$). Se não converge, então $Z(x, y)$ não está definido neste ponto, e podemos fazer $Z(x, y) = F_x(y)$.

Resumindo, para quase todo $x \in [0, 1]$ (lembre que Γ_Ψ tem medida nula)

$$Z_{Q_m}(x, \cdot) \xrightarrow{w} Z(x, \cdot).$$

Para $x \in \Gamma_\Psi$, tome $Z(x, y) = y$, para todo $y \in [0, 1]$. Com isso, Z está totalmente definido e, pelo Teorema 80 da convergência dominada de Lebesgue, é mensurável, pois é limite da convergência pontual, a menos de um conjunto de medida nula, de funções mensuráveis. \square

A Definição 35 abaixo é provavelmente a mais importante desta tese e apresenta o objeto limite das sequências convergentes de permutações, que chamaremos *permutação limite*.

Definição 35 (Permutação limite). *Uma permutação limite é uma função mensurável $Z : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ que satisfaz as seguintes condições:*

- (a) Para todo $x \in [0, 1]$, $Z(x, \cdot)$ é uma fda contínua em 0 e em 1
- (b) Para todo $y \in [0, 1]$, $Z(\cdot, y)$ é uma função mensurável e

$$\int_0^1 Z(x, y) dx = y$$

A condição (b) é uma condição de “massa” e diz que a “soma” de todas as fdas em Z gera a fda “ $y = x$ ” (está relacionada com a propriedade (b) da definição de permutação ponderada).

Como exemplo de permutação limite, temos $Z_u : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ onde todas as fdas são uniformes, ou seja, $Z_u(x, y) = y$ para todo $x, y \in [0, 1]$. É fácil verificar que Z_u satisfaz a condição de massa.

Outro exemplo é a permutação limite Z_{01} onde, para todo $x \in [0, 1]$, a fda $Z_{01}(x, \cdot)$ é formada apenas de duas descontinuidades: uma em x de tamanho $1 - p$ e outra em $1 - x$ de tamanho p , para algum $p \in [0, 1]$. Também é fácil ver que Z_{01} satisfaz a condição de massa. Para isso observe que,

se $y \in [0, 1/2]$, então $Z_{01}(x, y) = 1 - p$ (para $x \in [0, y]$) ou $Z_{01}(x, y) = 0$ (para $x \in [y, 1 - y]$) ou $Z_{01}(x, y) = p$ (para $x \in [1 - y, 1]$). Nesse caso, $\int_0^1 Z_{01}(x, y) dx = (1 - p) \cdot y + p \cdot y = y$. Se $y \in [1/2, 1]$, então $Z_{01}(x, y) = 1 - p$ (para $x \in [0, 1 - y]$) ou $Z_{01}(x, y) = 1$ (para $x \in [1 - y, y]$) ou $Z_{01}(x, y) = p$ (para $x \in [y, 1]$). Nesse caso, $\int_0^1 Z_{01}(x, y) dx = (1 - p) \cdot (1 - y) + (2y - 1) \cdot 1 + (1 - y) \cdot p = y$.

Outro exemplo é a permutação limite Z_{du} onde, para todo $x \in [0, 1]$, a fda $Z_{du}(x, \cdot)$ tem uma descontinuidade em x de tamanho $1 - p$ e é uniforme nos demais pontos, para algum $p \in [0, 1]$. Se $p = 1$, temos Z_u . Também é fácil ver que Z_{du} satisfaz a condição de massa. Para isso observe que, dado $y \in [0, 1]$, $Z(x, y) = (1 - p) + p \cdot y$ (para $x \in [0, y]$) ou $Z(x, y) = p \cdot y$ (para $x \in [y, 1]$). Assim, $\int_0^1 Z_{du}(x, y) dx = ((1 - p) + p \cdot y) \cdot y + (p \cdot y) \cdot (1 - y) = y$.

O lema abaixo prova uma importante propriedade das permutações limite, que é usada na prova de outros lemas. A conclusão importante dele é que não existe um conjunto de medida positiva onde as fdas tenham uma descontinuidade em um mesmo ponto (ver a semelhança com a equação 4.1). Isso será útil na geração de permutações aleatórias tendo Z como modelo, pois todos os números gerados serão diferentes entre si com probabilidade 1.

Lema 36. *Seja Z uma permutação limite. Então, para todo $\alpha \in [0, 1]$, o conjunto dos pontos $x \in [0, 1]$ tais que $Z(x, \cdot)$ é descontínua em α é de medida nula.*

Prova. Fixe $\alpha \in [0, 1]$. Do Fato 70 da Seção A.1, temos que, para todo $x \in [0, 1]$, o limite à direita $\lim_{\alpha' \rightarrow \alpha+} Z(x, \alpha')$ existe para todo $\alpha \in [0, 1)$. No caso de $\alpha = 1$, podemos supor $\lim_{\alpha' \rightarrow 1+} Z(x, \alpha') = 1$ se estendermos as fdas para a reta real, como mencionado na Seção A.1.

Do Teorema 80 da convergência dominada de Lebesgue e da Definição 35(b) de permutação limite acima, temos que

$$\int_0^1 \lim_{\alpha' \rightarrow \alpha+} Z(x, \alpha') dx = \lim_{\alpha' \rightarrow \alpha+} \int_0^1 Z(x, \alpha') dx = \lim_{\alpha' \rightarrow \alpha+} \alpha' = \alpha.$$

Com isso,

$$\int_0^1 \left(\lim_{\alpha' \rightarrow \alpha+} Z(x, \alpha') - Z(x, \alpha) \right) dx = 0 \quad (4.4)$$

Assim, o conjunto dos pontos $x \in [0, 1]$ tais que $\lim_{\alpha' \rightarrow \alpha+} Z(x, \alpha') - Z(x, \alpha) > 0$ é de medida nula. \square

O lema abaixo é usado em um importante lema posterior. Ele afirma que, dada uma permutação limite Z , o conjunto D_Z dos pares $(x_1, x_2) \in [0, 1]^2$ tais que suas fdas em Z compartilham uma

descontinuidade é de medida nula. Note que, para todo $x_1 \in [0, 1]$, o conjunto $D_Z(x_1) = \{x_2 \in [0, 1] : (x_1, x_2) \in D\}$ tem medida nula. Isso porque $Z(x_1, \cdot)$ tem um conjunto enumerável de pontos de descontinuidades α e, pelo lema anterior, cada α só pode ser descontínuo em um conjunto de medida nula de fdas. Isso é um indicativo de que D_Z tem medida nula no plano, já que suas seções horizontais e verticais têm medida nula. Mas, isso só é válido se for provada a mensurabilidade de D_Z no plano, que é a dificuldade aqui. Gostaríamos então de agradecer a imensa ajuda de Carlos Gustavo Moreira [48], IMPA, que é o autor da elegante prova deste lema.

Lema 37. *Dada uma permutação limite $Z : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$, seja $D_Z \subset [0, 1]^2$ o conjunto dos pares (x_1, x_2) tais que $Z(x_1, \cdot)$ e $Z(x_2, \cdot)$ tem uma descontinuidade em um mesmo ponto. Então D_Z é mensurável em $[0, 1]^2$ e tem medida nula.*

Prova. Seja λ a medida de Lebesgue. Para $x \in [0, 1]$, seja $A(x)$ o conjunto dos pontos $\alpha \in [0, 1]$ tais que $Z(x, \cdot)$ é descontínua em α . Por definição, $Z(x, \cdot)$ não é descontínua em 0 nem 1. Para $\alpha \in [0, 1]$, seja $X(\alpha)$ o conjunto dos pontos $x \in [0, 1]$ tais que $Z(x, \cdot)$ é descontínua em α .

Para todo $k \geq 1$, seja $D_k \subset [0, 1]^2$ o conjunto dos pares (x_1, x_2) tais que $Z(x_1, \cdot)$ e $Z(x_2, \cdot)$ tem uma descontinuidade de tamanho pelo menos $1/k$ em um mesmo ponto $\alpha \in [0, 1]$. Então $D_Z = \bigcup_{k=1}^{\infty} D_k$. Se $\lambda(D_k) = 0$ para todo $k \geq 1$, então D_Z tem medida nula.

Fixe $k \geq 1$. Provaremos que $\lambda(D_k) = 0$. Para todo inteiro $n \geq 0$ e $1 \leq j \leq 2^n$, seja

$$Y_j^{(n)} = \{x \in [0, 1] : Z(x, j/2^n) - Z(x, (j-1)/2^n) \geq 1/k\}$$

o conjunto dos pontos $x \in [0, 1]$ tais que a fda $Z(x, \cdot)$ tem uma diferença de pelo menos $1/k$ entre os pontos $(j-1)/2^n$ e $j/2^n$. Por exemplo, $Y_1^{(0)} = [0, 1]$, pois a variação total é 1 já que nenhuma fda de Z é descontínua em 1. Note ainda que $Y_j^{(n)} \supset Y_{2j}^{(n+1)}$ e $Y_j^{(n)} \supset Y_{2j-1}^{(n+1)}$.

Observe que, para todo $n \geq 1$,

$$D_k \subset \bigcup_{j=1}^{2^n} \left(Y_j^{(n)} \times Y_j^{(n)} \right).$$

Note também que

$$\lambda(D_k) \leq \lambda\left(\bigcup_{j=1}^{2^n} (Y_j^{(n)} \times Y_j^{(n)})\right) \leq \sum_{j=1}^{2^n} \lambda(Y_j^{(n)})^2 \leq \left(\max_{1 \leq j \leq 2^n} \lambda(Y_j^{(n)})\right) \sum_{j=1}^{2^n} \lambda(Y_j^{(n)}) \quad (4.5)$$

Afirmamos as duas equações abaixo.

$$\text{Para todo } n \text{ fixo, } \sum_{j=1}^{2^n} \lambda(Y_j^{(n)}) \leq k. \quad (4.6)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{1 \leq j \leq 2^n} \lambda(Y_j^{(n)}) = 0. \quad (4.7)$$

Com isso, fazendo $n \rightarrow \infty$ e aplicando (4.6) e (4.7) em (4.5), temos que $\lambda(D_k) = 0$, como desejado.

Falta provar (4.6) e (4.7). Para provar (4.6), fixe $n \geq 0$. Para $1 \leq j \leq 2^n$, seja $1_j : [0, 1] \rightarrow \{0, 1\}$ a função característica de $Y_j^{(n)}$, ou seja, $1_j(x) = 1$ se e só se $x \in Y_j^{(n)}$. Então, para todo $x \in [0, 1]$, temos que $\sum_{j=1}^{2^n} 1_j(x) \leq k$, pois cada x pertence a no máximo k conjuntos $Y_j^{(n)}$. Portanto

$$\sum_{j=1}^{2^n} \lambda(Y_j^{(n)}) = \sum_{j=1}^{2^n} \int_0^1 1_j(x) dx = \int_0^1 \sum_{j=1}^{2^n} 1_j(x) dx \leq \int_0^1 k dx \leq k$$

Suponha agora por contradição que (4.7) não vale. Então existe um $\delta > 0$ e existem sequências (n_l) , $n_l \rightarrow \infty$, e (j_l) , $1 \leq j_l \leq 2^{n_l}$, tais que $\lambda(Y_{j_l}^{(n_l)}) \geq \delta$ para todo $l \geq 0$. Para todo $l \geq 0$, sejam $a_l = (j_l - 1)/2^{n_l}$ e $b_l = j_l/2^{n_l}$. Seja $I_l \subset [0, 1]$ o intervalo $[a_l, b_l]$.

Como $Y_1^{(0)} = [0, 1]$ e a variação é $1 \geq \delta$, temos que $n_0 = 0$, $j_0 = 1$, $a_0 = 0$, $b_0 = 1$ e $I_0 = [0, 1]$. Note ainda que, se $\lambda(Y_{2j_l}^{(n_l+1)}) \geq \delta$ ou $\lambda(Y_{2j_l-1}^{(n_l+1)}) \geq \delta$, então $\lambda(Y_{j_l}^{(n_l)}) \geq \delta$. Com isso, podemos considerar a sequência (n_l) como a sequência dos naturais.

Construiremos uma árvore infinita Γ com nós (j, n) , $n = 0, 1, 2, \dots$ e $1 \leq j \leq 2^n$. O nó (j, n) tem no máximo dois filhos $(2j, n+1)$ e $(2j-1, n+1)$. Existe uma aresta entre os nós (j, n) e $(2j, n+1)$ se e só se $\lambda(Y_{2j}^{(n+1)}) \geq \delta$. O mesmo para a aresta entre (j, n) e $(2j-1, n+1)$.

Pelo exposto, temos que a árvore Γ é infinita, conexa, está contida na árvore binária infinita e a raiz de Γ é o nó $(1, 0)$, como já explicado. O Lema de König afirma então que Γ possui um caminho

infinito partindo da raiz.

Podemos então considerar as sequências (n_l) e (j_l) de acordo com este caminho infinito. Assim a sequência de intervalos (I_l) é encaixante. Ou seja, $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \dots$. Em particular, existe $\alpha \in (0, 1)$ tal que $\bigcap_{l=1}^{\infty} I_l = \alpha$.

Para todo $l > 0$, seja $\tilde{Y}_l = Y_{j_l}^{(n_l)}$. Pelo já exposto, temos também que $\tilde{Y}_1 \supset \tilde{Y}_2 \supset \tilde{Y}_3 \dots$. Seja $\tilde{Y} = \bigcap_{l=1}^{\infty} \tilde{Y}_l$. Segue que $\lambda(\tilde{Y}) \geq \delta$ e $\tilde{Y} \subset X(\alpha)$. Temos então uma contradição, pois $\lambda(X(\alpha)) = 0$. \square

Lema 38. *Dada a Configuração 31, existe uma permutação limite $Z : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ tal que*

- (i) *Para quase todo $(x, y) \in [0, 1]^2$, $Z_{Q_m}(x, y) \rightarrow Z(x, y)$ ($m \rightarrow \infty$)*
- (ii) *Para quase todo $x \in [0, 1]$, $Z_{Q_m}(x, \cdot) \xrightarrow{w} Z(x, \cdot)$ ($m \rightarrow \infty$)*
- (iii) *Para todo m e $i, j \in [k_m]$*

$$Q_m(i, j) = k_m^2 \int_{(i-1)/k_m}^{i/k_m} \int_{(j-1)/k_m}^{j/k_m} Z(x, y) dx dy$$

Prova. Pelo Lema 32, $Q_m(\phi_m(X), \phi_m(Y))$, $m = 1, 2, \dots$, forma um martingal e, como é limitado, conclui-se pelo Teorema da Convergência de Martingais [27] que $\lim_{m \rightarrow \infty} Z_{Q_m}(x, y)$ existe com probabilidade 1. Isso significa que, para quase todo (x, y) , $Z_{Q_m}(x, y)$ converge. Do Lema 34, temos que existe $Z : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ mensurável, tal que $Z(x, \cdot)$ é uma fda para todo $x \in [0, 1]$ satisfazendo (i) e (ii).

Para provar (iii) observe que, para $i, j \in [k_m]$

$$\begin{aligned} Q_m(i, j) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{k_m}{k_n} \right)^2 \sum_{x=(i-1)(k_n/k_m)+1}^{i(k_n/k_m)} \sum_{y=(j-1)(k_n/k_m)+1}^{j(k_n/k_m)} Q_n(x, y) \\ &= k_m^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{(i-1)/k_m}^{i/k_m} \int_{(j-1)/k_m}^{j/k_m} Q_n(\phi_n(x), \phi_n(y)) dx dy \\ &= k_m^2 \int_{(i-1)/k_m}^{i/k_m} \int_{(j-1)/k_m}^{j/k_m} Z(x, y) dx dy \end{aligned}$$

Falta mostrar que Z é uma permutação limite. Note que, como Z é mensurável, então, pelo

teorema de Fubini [53], $Z(\cdot, y)$ é uma função mensurável para quase todo $y \in [0, 1]$. Seja $Y \subset [0, 1]$ o conjunto dos pontos y tais que $Z(\cdot, y)$ é mensurável. Claramente Y é denso em $[0, 1]$.

Tome agora qualquer $y \in (0, 1]$. Pela continuidade à esquerda e pela equação A.1 da Seção A.1,

$$Z(x, y) = \lim_{\substack{y' \rightarrow y^- \\ y' \in Y}} Z(x, y'), \quad \text{para todo } x \in [0, 1].$$

Com isso, $Z(\cdot, y)$ é o limite da convergência pontual de funções mensuráveis $Z(\cdot, y')$ ($y' \in Y$). Então, pelo Teorema 80 da convergência dominada de Lebesgue, $Z(\cdot, y)$ é mensurável para todo $y \in [0, 1]$.

Suponha então, por contradição, que Z não satisfaz a condição (b) da Definição 35, ou seja, existe um $y \in [0, 1]$ tal que

$$\int_0^1 Z(x, y) dx = y + \Delta, \quad \text{para algum } -y < \Delta < 1 - y \text{ com } |\Delta| > 0.$$

Suponha inicialmente que $y \neq 0$ e $y \neq 1$. Tome k_m tal que $k_m > 12/|\Delta|$, $k_m > 2/y$ e $k_m > 2/(1 - y)$. Tome j tal que $\frac{j}{k_m} \leq y \leq \frac{j+1}{k_m}$. Observe então que, de (iii)

$$\sum_{i=1}^{k_m} Q_m(i, j) = \sum_{i=1}^{k_m} k_m^2 \int_{(i-1)/k_m}^{i/k_m} \int_{(j-1)/k_m}^{j/k_m} Z(x, y) dx dy = k_m^2 \int_0^1 \int_{(j-1)/k_m}^{j/k_m} Z(x, y) dx dy$$

Portanto, da propriedade (b) da definição de permutação ponderada, temos que

$$\frac{j-1}{k_m^2} \leq \int_0^1 \int_{(j-1)/k_m}^{j/k_m} Z(x, y) dx dy \leq \frac{j}{k_m^2} \leq \int_0^1 \int_{j/k_m}^{(j+1)/k_m} Z(x, y) dx dy \leq \frac{j+1}{k_m^2} \quad (4.8)$$

Como, para todo $x \in [0, 1]$, $Z(x, \cdot)$ é não decrescente, temos

$$\frac{1}{1/k_m} \int_{(j-1)/k_m}^{j/k_m} Z(x, y) dy \leq Z\left(x, \frac{j}{k_m}\right) \leq \frac{1}{1/k_m} \int_{j/k_m}^{(j+1)/k_m} Z(x, y) dy. \quad (4.9)$$

Logo, de (4.8) e (4.9),

$$\frac{j-1}{k_m} \leq \int_0^1 Z\left(x, \frac{j}{k_m}\right) dx \leq \frac{j+1}{k_m} \quad (4.10)$$

Como $1 \leq j < k_m - 2$, temos de (4.10) que

$$\frac{j-1}{k_m} \leq \int_0^1 Z\left(x, \frac{j}{k_m}\right) dx \leq \frac{j+1}{k_m} \leq \int_0^1 Z\left(x, \frac{j+2}{k_m}\right) dx \leq \frac{j+3}{k_m} \quad (4.11)$$

Logo, de (4.11) e do fato de $Z(x, \cdot)$ ser não decrescente, $\forall x \in [0, 1]$, temos

$$y - \frac{2}{k_m} \leq \frac{j-1}{k_m} \leq \int_0^1 Z\left(x, \frac{j}{k_m}\right) dx \leq \int_0^1 Z(x, y) dx \leq \int_0^1 Z\left(x, \frac{j+2}{k_m}\right) dx \leq \frac{j+3}{k_m} \leq y + \frac{3}{k_m}$$

Portanto, temos uma contradição e Z satisfaz (b), pois

$$y - \frac{|\Delta|}{4} < y - \frac{3}{k_m} \leq \int_0^1 Z(x, y) dx \leq y + \frac{3}{k_m} < y + \frac{|\Delta|}{4}.$$

Se $y = 0$ ou $y = 1$, valem argumentos idênticos com pequenas diferenças (tomando limitantes apenas de um lado). Finalmente, se $Z(x, \cdot)$ é descontínua em 0 ou 1, faça $Z(x, \cdot)$ igual a fda Z_u uniforme. Pelo Lema 36, essa alteração afeta apenas um conjunto de medida nula. \square

4.4 Convergência das Sequências de Permutações

Sabe-se que toda fda tem associada uma medida de Lebesgue-Stieltjes (ver Seção A.1). A convergência fraca de fdas é importante para mostrar a convergência das integrais sobre essas medidas. Seja $Z : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ uma função tal que $Z(x, \cdot)$ é uma fda para todo $x \in [0, 1]$. Fixado $(x_1, \dots, x_m) \in [0, 1]^m$, cada fda $Z(x_1, \cdot), \dots, Z(x_m, \cdot)$ define uma medida, cujo produto define uma medida sobre $[0, 1]^m$. Dado $m > 1$, lembre que $[0, 1]_o^m$ é o conjunto dos pontos $(\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in [0, 1]^m$ tais que $\alpha_1 < \dots < \alpha_m$. Para melhor compreensão da notação abaixo, indicamos a leitura da Seção A.1.

Definição 39. Dada uma permutação $\tau : \mathbb{Z}_m \rightarrow \mathbb{Z}_m$ ($m > 1$) e uma função $Z : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ tal que $Z(x, \cdot)$ é uma fda para todo $x \in [0, 1]$, seja $L_{\tau, Z} : [0, 1]^m \rightarrow [0, 1]$ a função que leva todo $x = (x_1, \dots, x_m) \in [0, 1]^m$ em

$$L_{\tau, Z}(x) = \int_{[0, 1]^m} Z(x_1, d\alpha_{\tau(1)}) \cdots Z(x_m, d\alpha_{\tau(m)}) = \int_{[0, 1]^m} Z(x_{\tau^{-1}(1)}, d\alpha_1) \cdots Z(x_{\tau^{-1}(m)}, d\alpha_m)$$

A integral na definição acima, sobre o produto das medidas provenientes das fdas, está escrita de

dois modos diferentes. Sejam μ_1, \dots, μ_m as medidas associadas às fdas $Z(x_{\tau^{-1}(1)}, \cdot), \dots, Z(x_{\tau^{-1}(m)}, \cdot)$. O produto $\mu_\tau = \mu_1 \times \dots \times \mu_m$ dessas medidas é uma medida em $[0, 1]^m$, o hiper-cubo unitário m -dimensional (ou m -cubo unitário). O valor de $L_{\tau, Z}(x)$ é a medida μ_τ de $[0, 1]_o^m$, um m -simplexo do m -cubo. A Figura 4.5 abaixo faz uma ilustração de $[0, 1]_o^m$ para o caso $m = 3$ (o 3-simplexo é chamado de tetraedro). Como exemplo, se μ_τ é a medida de Lebesgue em $[0, 1]^m$, é fácil verificar que a medida desse m -simplexo é igual a $\mu_\tau([0, 1]_o^m) = 1/m!$.

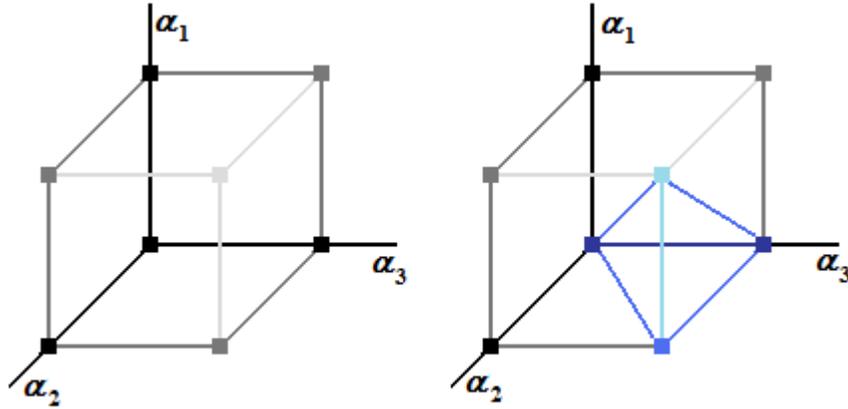


Figura 4.5: 3-cubo $[0, 1]^3$ e o 3-simplexo $[0, 1]_o^3$

O Lema 40 abaixo é um dos mais importantes e técnicos dessa tese. Ele prova a convergência das integrais múltiplas de Lebesgue-Stieltjes para quase todo $x \in [0, 1]^m$.

Lema 40. *Seja Z uma permutação limite. Considere uma sequência de permutações ponderadas $Q_n : [k_n]^2 \rightarrow [0, 1]$ tal que $Z_{Q_n}(x, y) \rightarrow Z(x, y)$ para quase todo $x, y \in [0, 1]$ e $Z_{Q_n}(x, \cdot) \xrightarrow{w} Z(x, \cdot)$ para quase todo $x \in [0, 1]$. Seja $\tau : \mathbb{Z}_m \rightarrow \mathbb{Z}_m$ ($m > 1$) uma permutação. Então, para quase todo $x \in [0, 1]^m$, temos que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_{\tau, Z_{Q_n}}(x) = L_{\tau, Z}(x). \quad (4.12)$$

Prova. Seja $[0, 1]_w^m \subset [0, 1]^m$ formado pelos pontos $x = (x_1, \dots, x_m)$ tais que $Z_{Q_n}(x_i, \cdot) \xrightarrow{w} Z(x_i, \cdot)$ ($n \rightarrow \infty$), para todo $i \in [m]$. Segue do enunciado que $[0, 1]^m \setminus [0, 1]_w^m$ é de medida nula.

Seja $[0, 1]_d^m$ o conjunto dos pontos (x_1, \dots, x_m) de $[0, 1]^m$ tais que, para algum par $1 \leq i < j \leq m$, $Z(x_i, \cdot)$ e $Z(x_j, \cdot)$ são fdas com um mesmo ponto de descontinuidade. Temos pelo Lema 37 que $[0, 1]_d^m$

é de medida nula. Definimos então $[0, 1]_{bom}^m$ como $[0, 1]_{bom}^m = [0, 1]_w^m \setminus [0, 1]_d^m$. Com isso, $[0, 1]^m \setminus [0, 1]_{bom}^m$ tem medida nula.

Temos que provar que todo $x \in [0, 1]_{bom}^m$ satisfaz a equação 4.12. Para isso, faremos uso do Teorema 79 de Alexandrov, explicitado na Seção A.1. Grosso modo, ele afirma que, dada uma sequência de medidas de probabilidade μ, μ_1, μ_2, \dots em um espaço métrico Ω e dado um subconjunto $A \subset \Omega$ tal que $\mu(\partial A) = 0$, então a convergência fraca das medidas $\mu_n \xrightarrow{w} \mu$ ($n \rightarrow \infty$) implica a convergência da medida $\mu_n(A)$ para $\mu(A)$. A fronteira ∂A de A é o conjunto dos pontos tais que toda bola aberta centrada neles contém pontos de A e pontos de seu complementar $\Omega \setminus A$ [41].

É fácil ver que a fronteira $\partial[0, 1]_o^m$ de $[0, 1]_o^m$ em $[0, 1]^m$ é o conjunto dos pontos $(\alpha_1 \leq \dots \leq \alpha_m) \in [0, 1]^m$ tais que $\alpha_i = \alpha_{i+1}$ para algum $i \in [m-1]$. Claramente, $\partial[0, 1]_o^m$ tem medida de Lebesgue nula em $[0, 1]^m$.

Fixe agora $x = (x_1, \dots, x_m) \in [0, 1]_{bom}^m$. Seja μ a medida em $[0, 1]^m$ consistindo no produto das medidas de Lebesgue-Stieltjes provenientes de cada fda $Z(x_{\tau^{-1}(i)}, \cdot)$, para todo $i \in [m]$. Para todo $n > 1$, seja μ_n a medida em $[0, 1]^m$ consistindo no produto das medidas de Lebesgue-Stieltjes provenientes de cada fda $Z_{Q_n}(x_{\tau^{-1}(i)}, \cdot)$, para todo $i \in [m]$. Como $x \in [0, 1]_w^m$, temos pelo Teorema de Helly-Bray multivariável (ver Seção A.1) que μ_n converge fracamente para μ ($n \rightarrow \infty$).

Para provar que $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n([0, 1]_o^m) = \mu([0, 1]_o^m)$, que é exatamente a equação 4.12 desejada, podemos utilizar o Teorema 79 de Alexandrov. Para isso, devemos provar que $\mu(\partial[0, 1]_o^m) = 0$.

Para todo $i \in [m-1]$, seja $\Omega_i \subset [0, 1]^m$ o hiper-plano formado pelos pontos $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ tais que $\alpha_{i+1} = \alpha_i$. Claramente, $\partial[0, 1]_o^m \subset \bigcup_{i=1}^{m-1} \Omega_i$. Logo $\mu(\partial[0, 1]_o^m) \leq \sum_{i=1}^{m-1} \mu(\Omega_i)$.

Pelo Teorema de Fubini [53], temos que

$$\mu(\Omega_1) = \int_{\alpha_1 \in [0,1]} \int_{\alpha_2 \in \{\alpha_1\}} \int_{\alpha_3 \in [0,1]} \int_{\alpha_4 \in [0,1]} \cdots \int_{\alpha_m \in [0,1]} Z(x_{\tau^{-1}(1)}, d\alpha_1) \cdots Z(x_{\tau^{-1}(m)}, d\alpha_m)$$

Como, para todo $k \in [m]$, $\int_{\alpha_k \in [0,1]} Z(x_{\tau^{-1}(k)}, d\alpha_k) = 1$, temos que

$$\mu(\Omega_1) = \int_{\alpha_1 \in [0,1]} \left(\int_{\alpha_2 \in \{\alpha_1\}} Z(x_{\tau^{-1}(2)}, d\alpha_2) \right) Z(x_{\tau^{-1}(1)}, d\alpha_1)$$

Seja D_2 o conjunto dos pontos de descontinuidade da fda $Z(x_{\tau^{-1}(2)}, \cdot)$. A integral interna é positiva

se $\alpha_1 \in D_2$ e é zero caso contrário. Logo

$$\mu(\Omega_1) \leq \int_{\alpha_1 \in D_2} Z(x_{\tau^{-1}(1)}, d\alpha_1) = \mu'_{\tau^{-1}(1)}(D_2),$$

onde $\mu'_{\tau^{-1}(1)}$ é a medida de Lebesgue-Stieltjes associada a fda $Z(x_{\tau^{-1}(1)}, \cdot)$. Pelo Fato 73 da Seção A.1, D_2 é enumerável. Como $\mu'_{\tau^{-1}(1)}$ é uma medida, então é enumeravelmente aditiva. Ou seja, temos que $\mu'_{\tau^{-1}(1)}(D_2) = \sum_{\alpha \in D_2} \mu'_{\tau^{-1}(1)}(\alpha)$.

Como $x \notin [0, 1]_d^m$, temos que as fdas $Z(x_{\tau^{-1}(1)}, \cdot)$ e $Z(x_{\tau^{-1}(2)}, \cdot)$ não podem ser ambas descontínuas em um mesmo ponto. Ou seja, $\mu'_{\tau^{-1}(1)}(\alpha) = 0$ para todo $\alpha \in D_2$. Logo, $\mu'_{\tau^{-1}(1)}(D_2) = 0$ e $\mu(\Omega_1) = 0$. Analogamente, teremos $\mu(\Omega_i) = 0$ para todo $i \in [m-1]$. Logo $\mu(\partial[0, 1]_o^m) = 0$. \square

O fato abaixo é usado para estabelecer a mensurabilidade das funções $L_{\tau, Z_{Q_n}}(\cdot)$. É usado também na prova da convergência das densidades de subpermutações.

Fato 41. *Seja $\tau : \mathbb{Z}_m \rightarrow \mathbb{Z}_m$ ($m > 1$) uma permutação. Seja $Q_n : [k_n]^2 \rightarrow [0, 1]$ ($k_n > 0$) uma permutação ponderada. Então, para todo $x = (x_1, \dots, x_m) \in (0, 1]^m$*

$$L_{\tau, Z_{Q_n}}(x) = \sum_{A \in [k_n+1]_o^m} \prod_{i=1}^m \left(Q_n(\lceil k_n x_i \rceil, a_{\tau(i)}) - Q_n(\lceil k_n x_i \rceil, a_{\tau(i)} - 1) \right)$$

Prova. Note que, para todo $x_1, \alpha_1 \in [0, 1]$, $x_1 \neq 0$

$$Z_{Q_n}(x_1, \alpha_1) = Z_{Q_n}\left(\frac{\lceil k_n x_1 \rceil}{k_n}, \frac{\lceil k_n \alpha_1 \rceil}{k_n}\right) = Q_n(\lceil k_n x_1 \rceil, \lceil k_n \alpha_1 \rceil)$$

Com isso, para $x = (x_1, \dots, x_m) \in (0, 1]^m$

$$\begin{aligned} L_{\tau, Z_{Q_n}}(x) &= \int_{[0, 1]_o^m} Z_{Q_n}(x_1, d\alpha_{\tau(1)}) \cdots Z_{Q_n}(x_m, d\alpha_{\tau(m)}) \\ &= \int_{[0, 1]_o^m} Z_{Q_n}\left(\frac{\lceil k_n x_1 \rceil}{k_n}, d\alpha_{\tau(1)}\right) \cdots Z_{Q_n}\left(\frac{\lceil k_n x_m \rceil}{k_n}, d\alpha_{\tau(m)}\right) \end{aligned}$$

Como $Z_{Q_n}(x_i, \cdot)$ é uma fda discreta constante em cada intervalo $(0, \frac{1}{k_n}]$, $(\frac{1}{k_n}, \frac{2}{k_n}]$, \dots , $(\frac{k_n-1}{k_n}, 1]$, temos

que as descontinuidades só podem ocorrer nos pontos α do conjunto $\{0, \frac{1}{k_n}, \dots, \frac{k_n-1}{k_n}, 1\}$. Por isso

$$\begin{aligned} L_{\tau, Z_{Q_n}}(x) &= \int_{\{0, \frac{1}{k_n}, \frac{2}{k_n}, \dots, 1\}_o^m} Z_{Q_n}\left(\frac{[k_n x_1]}{k_n}, d\alpha_{\tau(1)}\right) \cdots Z_{Q_n}\left(\frac{[k_n x_m]}{k_n}, d\alpha_{\tau(m)}\right) \\ &= \sum_{A \in [k_n+1]_o^m} \prod_{i=1}^m \left(Z_{Q_n}\left(\frac{[k_n x_i]}{k_n}, \frac{a_{\tau(i)}}{k_n}\right) - Z_{Q_n}\left(\frac{[k_n x_i]}{k_n}, \frac{a_{\tau(i)}-1}{k_n}\right) \right) \\ &= \sum_{A \in [k_n+1]_o^m} \prod_{i=1}^m \left(Q_n([k_n x_i], a_{\tau(i)}) - Q_n([k_n x_i], a_{\tau(i)}-1) \right), \end{aligned}$$

onde, para lidar com descontinuidades em 1 e não complicar a notação, consideramos $Z_{Q_n}(x_i, \alpha_i) = 1$, para $\alpha_i > 1$ ($x_i \in [0, 1]$). \square

Corolário 42. *Seja $\tau : \mathbb{Z}_m \rightarrow \mathbb{Z}_m$ ($m > 1$) uma permutação. Se Z é uma permutação limite, então $L_{\tau, Z}(\cdot)$ é uma função Lebesgue-mensurável.*

Prova. Seguindo idéias de [13], aproximaremos permutações limite através de matrizes. Seja $\mathcal{P} = (a_1 < \dots < a_k)$ uma partição de $[0, 1]$ em k intervalos $V_i = (a_i, a_{i+1}]$ ($0 \leq i \leq k$), onde $a_0 = 0$ e $a_{k+1} = 1$. Seja $|V_i| = a_{i+1} - a_i$ para todo $i \in [k]$.

Defina a matriz $Q_{Z, \mathcal{P}} : [k]^2 \rightarrow [0, 1]$ da seguinte forma: para todo $i, j \in [k]$

$$Q_{Z, \mathcal{P}}(i, j) = \frac{1}{|V_i| \cdot |V_j|} \int_{V_i \times V_j} Z(x, y) dx dy.$$

Para todo $n \geq 1$, seja \mathcal{P}_n a partição de $[0, 1]$ em intervalos consecutivos de tamanho $1/2^n$ e seja $Q_n = Q_{Z, \mathcal{P}_n}$. Assim, para $n' > n > 0$, $Q_{n'}$ é um “refinamento” de Q_n e podemos obter um martingal, assim como feito no Lema 32, provando, pela convergência dos martingais, que $Z_{Q_n}(x, y) \rightarrow Z(x, y)$ para quase todo $x, y \in [0, 1]$. Com isso, pelo Lema 34, temos que $Z_{Q_n}(x, \cdot) \xrightarrow{w} Z(x, \cdot)$ ($n \rightarrow \infty$), para quase todo $x \in [0, 1]$.

Podemos então aplicar o Lema 40, mostrando que $L_{\tau, Z}(\cdot)$ é o limite da convergência pontual (a menos de um conjunto de medida nula) das funções $L_{\tau, Z_{Q_n}}(\cdot)$, que são mensuráveis pelo Fato 41. Logo, pelo Teorema 80 da convergência dominada de Lebesgue [8], $L_{\tau, Z}(\cdot)$ é mensurável. \square

Veremos abaixo que a convergência das permutações ponderadas para uma permutação limite Z

implica na convergência das densidades de qualquer subpermutação τ , e o limite é a densidade de subpermutações de τ em Z , definido a seguir.

Definição 43 (Densidade de subpermutações em permutações limite). *Dada uma permutação $\tau : \mathbb{Z}_m \rightarrow \mathbb{Z}_m$ ($m > 1$) e uma permutação limite $Z : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$, definimos a densidade de subpermutações $t(\tau, Z)$ como*

$$t(\tau, Z) = m! \int_{[0,1]_o^m} L_{\tau,Z}(x) dx = m! \int_{[0,1]_o^m} \left(\int_{[0,1]_o^m} Z(x_1, d\alpha_{\tau(1)}) \cdots Z(x_m, d\alpha_{\tau(m)}) \right) dx_1 \cdots dx_m \quad (4.13)$$

Lembre que, do Corolário 42, $L_{\tau,Z}(\cdot)$ é Lebesgue-mensurável. O termo $m!$ vem do fato de que $\lambda([0, 1]_o^m) = 1/m!$, onde λ é a medida de Lebesgue. Ou seja, é um fator de normalização. Esta definição se assemelha a uma proposta por Cooper no Teorema 11 de [22] (ver Lema 10 da Seção 2.2).

Um exemplo simples desta notação é se tomarmos uma permutação limite Z_u tal que $Z_u(x, y) = y$, para todo $x, y \in [0, 1]$ (ou seja, todas as fdas são uniformes). Neste caso, temos que, para todo $\tau : \mathbb{Z}_m \rightarrow \mathbb{Z}_m$,

$$\begin{aligned} t(\tau, Z_u) &= m! \int_{[0,1]_o^m} \left(\int_{[0,1]_o^m} d\alpha_{\tau(1)} \cdots d\alpha_{\tau(m)} \right) dx_1 \cdots dx_m \\ &= m! \int_{[0,1]_o^m} \left(\frac{1}{m!} \right) dx_1 \cdots dx_m = \frac{1}{m!}, \end{aligned} \quad (4.14)$$

pois $\lambda([0, 1]_o^m) = 1/m!$. Essa equação indica uma definição alternativa para as permutações quase-aleatórias de Cooper, que será dada no Corolário 66.

Para finalizar a caracterização, precisamos provar o lema auxiliar abaixo.

Lema 44. *Considere, segundo a Configuração 31, uma sequência de inteiros (k_m) , $k_m \rightarrow \infty$, e uma sequência de permutações ponderadas $Q_m : [k_m]^2 \rightarrow [0, 1]$ convergindo para uma permutação limite $Z : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ segundo o Lema 38. Então, para toda permutação $\tau : \mathbb{Z}_m \rightarrow \mathbb{Z}_m$, temos que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t(\tau, Q_n) = t(\tau, Z).$$

Prova. Seja $\tau : \mathbb{Z}_m \rightarrow \mathbb{Z}_m$ uma permutação qualquer. Escreveremos L_n para a função $L_{\tau, Z_{Q_n}}$ da

Definição 39. Pela Definição 28 de $t(\tau, Q_n)$,

$$t(\tau, Q_n) = \binom{k_n}{m}^{-1} \sum_{X \in [k_n]_o^m} \sum_{A \in [k_n+1]_o^m} \prod_{i=1}^m \left(Q_n(X_i, a_{\tau(i)}) - Q_n(X_i, a_{\tau(i)} - 1) \right)$$

Pelo Fato 41, temos que

$$t(\tau, Q_n) = \binom{k_n}{m}^{-1} \sum_{X \in [k_n]_o^m} L_n\left(\frac{X_1}{k_n}, \dots, \frac{X_m}{k_n}\right).$$

Note que $L_n(x_1, \dots, x_m) = L_n\left(\frac{X_1}{k_n}, \dots, \frac{X_m}{k_n}\right)$ para todo $x_i \in \left(\frac{X_i-1}{k_n}, \frac{X_i}{k_n}\right]$ ($i \in [m]$). Podemos então ver o somatório $\sum_{X \in [k_n]_o^m}$ como uma integral múltipla, “compactando” $[k_n]$ no intervalo $[0, 1]$, onde x_1 varia de 0 a 1, x_2 varia de $\frac{1}{k_n} \lceil k_n x_1 \rceil$ a 1, x_3 varia de $\frac{1}{k_n} \lceil k_n x_2 \rceil$ a 1,...

$$t(\tau, Q_n) = \binom{k_n}{m}^{-1} k_n^m \int_{(0,1]} \int_{\left(\frac{1}{k_n} \lceil k_n x_1 \rceil, 1\right]} \int_{\left(\frac{1}{k_n} \lceil k_n x_2 \rceil, 1\right]} \cdots \int_{\left(\frac{1}{k_n} \lceil k_n x_{m-1} \rceil, 1\right]} L_n(x_1, \dots, x_m) dx_1 \cdots dx_m.$$

Com isso, temos o limitante superior

$$t(\tau, Q_n) \leq \binom{k_n}{m}^{-1} k_n^m \int_{[0,1]_o^m} L_n(x) dx.$$

Afirmamos ainda o seguinte limitante inferior

$$t(\tau, Q_n) \geq \binom{k_n}{m}^{-1} k_n^m \left(\int_{[0,1]_o^m} L_n(x) dx - \frac{m-1}{k_n} \right).$$

Para isso, note que os casos ruins da integral acima ocorrem quando algum dos $m-1$ pares em $\{(x_1, x_2), (x_2, x_3), \dots, (x_{m-1}, x_m)\}$ estão em um mesmo intervalo do tipo $\left[\frac{a}{k_n}, \frac{a+1}{k_n}\right]$. Assim, temos

$$\begin{aligned} t(\tau, Q_n) &\geq \binom{k_n}{m}^{-1} k_n^m \left(\int_{[0,1]_o^m} L_n(x) dx - \sum_{i=1}^{m-1} \int_0^1 \cdots \int_{x_{i-1}}^1 \int_{x_i}^{\frac{1}{k_n} \lceil k_n x_i \rceil} \int_{x_{i+1}}^1 \cdots \int_{x_{m-1}}^1 L_n(x) dx \right) \\ &\geq \binom{k_n}{m}^{-1} k_n^m \left(\int_{[0,1]_o^m} L_n(x_1, \dots, x_m) dx_1 \cdots dx_m - \sum_{i=1}^{m-1} \frac{1}{k_n} \right), \end{aligned}$$

como desejado.

Do teorema do confronto sobre os limitantes obtidos, temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t(\tau, Q_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \binom{k_n}{m}^{-1} k_n^m \int_{[0,1]_o^m} L_n(x) dx$$

Da definição de L_n e do fato $\binom{k_n}{m}^{-1} k_n^m \rightarrow m!$, temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t(\tau, Q_n) = m! \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[0,1]_o^m} \left(\int_{[0,1]_o^m} Z_{Q_n}(x_1, d\alpha_{\tau(1)}) \cdots Z_{Q_n}(x_m, d\alpha_{\tau(m)}) \right) dx_1 \cdots dx_m$$

Pelo Lema 38(ii), podemos aplicar o Lema 40, que garante a existência de um subconjunto $[0, 1]_{bom,o}^m \subset [0, 1]_o^m$ tal que $[0, 1]_o^m \setminus [0, 1]_{bom,o}^m$ é de medida nula em $[0, 1]^m$ e, para todo $x = (x_1, \dots, x_m) \in [0, 1]_{bom,o}^m$, vale a equação 4.12. Com isso, do Teorema 80 da convergência dominada de Lebesgue [52] sobre $[0, 1]_{bom,o}^m$, temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t(\tau, Q_n) = m! \int_{[0,1]_{bom,o}^m} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[0,1]_o^m} Z_{Q_n}(x_1, d\alpha_{\tau(1)}) \cdots Z_{Q_n}(x_m, d\alpha_{\tau(m)}) \right) dx_1 \cdots dx_m$$

Da definição de $[0, 1]_{bom,o}^m$ e pelo fato de $[0, 1]_o^m \setminus [0, 1]_{bom,o}^m$ ser de medida nula, temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t(\tau, Q_n) = m! \int_{[0,1]_o^m} \left(\int_{[0,1]_o^m} Z(x_1, d\alpha_{\tau(1)}) \cdots Z(x_m, d\alpha_{\tau(m)}) \right) dx_1 \cdots dx_m = t(\tau, Z)$$

□

O Teorema abaixo finaliza a caracterização.

Teorema 45. *Seja (σ_n) uma sequência convergente de permutações. Então existe uma permutação limite $Z : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ tal que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t(\tau, \sigma_n) = t(\tau, Z),$$

para toda permutação τ .

Prova. O Lema 30 mostra a existência da subsequência (σ'_m) e das sequências das partições $(\mathcal{P}_{m,j})$ e das matrizes $(Q_{m,j})$ e (Q_j) . Para $1 \leq j \leq m$, seja $\sigma_{m,j}^* = \mathcal{K}(\mathcal{P}_{m,j}, Q_{m,j})$ e seja $\sigma_{m,j}^{**} = \mathcal{K}(\mathcal{P}_{m,j}, Q_j)$.

Então

$$d_{\square}(\sigma'_m, \sigma_{m,j}^*) \leq \frac{1}{j}, \quad (4.15)$$

pois $\mathcal{P}_{m,j}$ é uma partição fraca $(1/j)$ -regular de σ'_m , e

$$d_{\square}(\sigma_{m,j}^*, \sigma_{m,j}^{**}) \leq \frac{1}{j} + \frac{3}{k_j}, \quad (4.16)$$

pelo Lema 30(iii) e pelo Lema 25. Tomando j suficientemente grande, temos de (4.15) e (4.16)

$$d_{\square}(\sigma'_m, \sigma_{m,j}^{**}) \leq \frac{3}{j}. \quad (4.17)$$

Fixe uma permutação τ . Seja $Z_{m,j} = Z_{\sigma_{m,j}^{**}}$ e $Z_j = Z_{Q_j}$. Claramente

$$t(\tau, Z_{m,j}) = t(\tau, \sigma_{m,j}^{**}).$$

Além disso, como $Q_{m,j}(\cdot, \cdot) \rightarrow Q_j(\cdot, \cdot)$, temos que para todo $x \in [0, 1]$

$$\left| t(\tau, Z_{m,j}) - t(\tau, Z_j) \right| \leq \frac{\varepsilon}{4},$$

para m suficientemente grande, pois $t(\tau, Z_j) = t(\tau, Q_j)$ pode ser escrito pela equação (4.3) da Definição 28.

Finalmente, pelo Lema 38, existe uma permutação limite Z tal que, para quase todo $x \in [0, 1]$,

$$Z_j(x, \cdot) \xrightarrow{w} Z(x, \cdot) \quad (j \rightarrow \infty). \quad (4.18)$$

Tome $\varepsilon > 0$ e escolha um inteiro m_0 tal que, para $m > m_0$,

$$\left| t(\tau, \sigma'_m) - \lim_{n \rightarrow \infty} t(\tau, \sigma_n) \right| \leq \frac{\varepsilon}{4}.$$

Segue de (4.18) e do Lema 44 que, com j suficientemente grande,

$$\left| t(\tau, Z) - t(\tau, Z_j) \right| \leq \frac{\varepsilon}{4}.$$

Para aplicação do Lema 29, podemos assumir que $m > j > m_0 > 24|\tau|^2/\varepsilon$. Pelo Lema 30 e por (4.17) temos que

$$\left| t(\tau, \sigma'_m) - t(\tau, \sigma_{m,j}^{**}) \right| \leq 2|\tau|^2 \cdot d_{\square}(\sigma'_m, \sigma_{m,j}^{**}) \leq 2|\tau|^2 \cdot \frac{3}{j} \leq \frac{\varepsilon}{4}.$$

Conclui-se então o Teorema, pois

$$\left| t(\tau, Z) - \lim_{n \rightarrow \infty} t(\tau, \sigma_n) \right| \leq \varepsilon.$$

□

4.5 Permutações Z -aleatórias

Definição 46 (Permutação Z -aleatória). *Dada uma permutação limite $Z : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ e um inteiro $n > 0$, uma permutação Z -aleatória (ou Z -permutação-aleatória) $\sigma(n, Z)$ é gerada da seguinte forma: Nós geramos aleatória e independentemente n pares de números $(X_1, a_1), \dots, (X_n, a_n)$ em $[0, 1]^2$ tais que X_i é uniforme e a_i é gerado segundo a fda $Z(X_i, \cdot)$, onde $i \in [n]$. Sejam $R, S : \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_n$ as permutações tais que $R(i) = |\{j : X_j \leq X_i\}|$ e $S(i) = |\{j : a_j \leq a_i\}|$, para todo $i \in [n]$. Então $\sigma(n, Z) = S \cdot R^{-1}$, ou seja, é a permutação de \mathbb{Z}_n em \mathbb{Z}_n tal que $\sigma_i = S(R^{-1}(i))$, para todo $i \in [n]$.*

Por exemplo, se $n = 4$, $X = (0.7, 0.3, 0.9, 0.2)$ e $a = (0.8, 0.2, 0.5, 0.3)$, então $R = (3, 2, 4, 1)$ e $S = (4, 1, 3, 2)$. Portanto, $\sigma = (2, 1, 4, 3)$. Observe que não há conflito pois, devido ao Lema 36, a sequência (a_1, a_2, \dots, a_n) terá dois elementos iguais com probabilidade 0.

Um modo equivalente é gerar uniformemente $(X_1 < \dots < X_n)$ em $[0, 1]_o^n$ e gerar aleatoriamente (a_1, \dots, a_n) em $[0, 1]^n$ segundo as fdas $Z(X_1, \cdot), \dots, Z(X_n, \cdot)$. Assim, $\sigma(n, Z)$ será a permutação obtida da ordem de (a_1, \dots, a_n) .

Teorema 47 ($t(\tau, \sigma(n, Z))$ converge para $t(\tau, Z)$). *Para toda permutação $\tau : \mathbb{Z}_m \rightarrow \mathbb{Z}_m$ e $n > m$, temos que*

$$(a) \mathbb{E}\left(t(\tau, \sigma(n, Z))\right) = t(\tau, Z)$$

$$(b) \mathbb{P}\left(\left|t(\tau, \sigma(n, Z)) - t(\tau, Z)\right| > \varepsilon\right) \leq 2 \exp\{-\varepsilon^2 n / 2m^2\}$$

Prova. Gere $\sigma(n, Z)$, ou seja, gere aleatoriamente $X = (X_1 < \dots < X_n)$ em $[0, 1]_o^n$ e gere aleatoriamente (a_1, \dots, a_n) em $[0, 1]^n$ segundo as fdas $Z(X_1, \cdot), \dots, Z(X_n, \cdot)$.

Dada uma função injetiva $\phi : [m] \rightarrow [n]$ tal que $\phi(1) < \dots < \phi(m)$, seja A_ϕ o evento: “ (a_1, \dots, a_n) segue o padrão de τ ”. Temos que, condicionado em X , a probabilidade de A_ϕ é

$$\mathbb{P}(A_\phi \mid X) = \int_{[0,1]_o^m} Z(X_{\phi(1)}, d\alpha_{\tau(1)}) \cdots Z(X_{\phi(m)}, d\alpha_{\tau(m)}).$$

Portanto, pela lei da probabilidade total,

$$\mathbb{P}(A_\phi) = \mathbb{E}_X(\mathbb{P}(A_\phi \mid X)) = \mathbb{E}_X\left(\int_{[0,1]_o^m} Z(X_{\phi(1)}, d\alpha_{\tau(1)}) \cdots Z(X_{\phi(m)}, d\alpha_{\tau(m)})\right) = t(\tau, Z).$$

Seja I_ϕ a variável indicadora do evento A_ϕ . Logo $\mathbb{E}(I_\phi) = \mathbb{P}(A_\phi)$. Lembrando que $\Lambda(\tau, \sigma) = \binom{n}{m} t(\tau, \sigma)$ é o número de ocorrências de τ em σ , temos que $\Lambda(\tau, \sigma(n, Z)) = \sum_\phi I_\phi$, onde o somatório é sobre todas funções injetivas $\phi : [m] \rightarrow [n]$. Logo, obtemos (a), pela linearidade da esperança,

$$\mathbb{E}(\Lambda(\tau, \sigma(n, Z))) = \sum_\phi \mathbb{E}(I_\phi) = \binom{n}{m} t(\tau, Z).$$

Para provar (b), recorremos a idéia de martingais de exposição [4]. Para maiores detalhes sobre martingais, ver a Definição 68 da Seção A. Seja $\sigma : \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_n$, onde $\sigma \sim \sigma(n, Z)$. Seja X_0, \dots, X_n a sequência de variáveis aleatórias tal que $X_i = \mathbb{E}(t(\tau, \sigma) \mid \sigma(1), \dots, \sigma(i))$. Com isso, $X_0 = \mathbb{E}(t(\tau, \sigma)) = t(\tau, Z)$ e $X_n = \mathbb{E}(t(\tau, \sigma) \mid \sigma(1), \dots, \sigma(n)) = t(\tau, \sigma)$.

Já observamos na Seção A que esse tipo de construção é um martingal, chamado martingal de Doob. Note ainda que $|X_{i+1} - X_i| \leq m/n$, pois a diferença no número de ocorrências de τ em Z -permutações-aleatórias de tamanho n que diferem em apenas um elemento é menor ou igual a

$$\binom{n-1}{m-1} = \binom{n}{m} \left(\frac{m}{n}\right).$$

Aplicando então a desigualdade de Azuma (ver Teorema 69 da Seção A), onde $c = m/n$, temos

$$\mathbb{P}\left(\left|t(\tau, \sigma(n, Z)) - t(\tau, Z)\right| > \varepsilon\right) = \mathbb{P}\left(\left|X_n - X_0\right| > \varepsilon\right)$$

$$\leq 2 \exp \left\{ - \frac{\varepsilon^2}{2n(m/n)^2} \right\} \leq 2 \exp \left\{ - \varepsilon^2 n / 2m^2 \right\}.$$

□

Corolário 48 (Permutações Z -aleatórias são convergentes). *Dada uma permutação limite $Z : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$, a sequência de permutações $(\sigma(n, Z))$ é convergente com probabilidade 1 e seu limite é Z .*

Prova. Fixe $\varepsilon > 0$ e uma permutação $\tau : \mathbb{Z}_m \rightarrow \mathbb{Z}_m$. Seja A_n o evento $\left(\left| t(\tau, \sigma(n, Z)) - t(\tau, Z) \right| > \varepsilon \right)$. O Teorema 47 mostra que $\mathbb{P}(A_n) \leq 2 \exp \left\{ - \varepsilon^2 n / 2m^2 \right\}$.

Portanto,

$$\sum_{n=1}^{\infty} Pr(A_n) < \infty.$$

Do lema de Borel-Cantelli, temos que a probabilidade de que A_n , $n = 1, 2, \dots$, ocorre para infinitos valores de n é nula. Como isso vale para qualquer $\varepsilon > 0$, temos que $t(\tau, \sigma(n, Z)) \rightarrow t(\tau, Z)$ com probabilidade 1. Como o conjunto de todas as permutações τ possíveis é enumerável, temos que isso ocorre com probabilidade 1 para todo τ . □

Juntando o Corolário 48 e o Teorema 45, temos o nosso resultado principal:

Teorema 49 (Resultado Principal). *Para toda sequência convergente de permutações (σ_n) , existe uma permutação limite $Z : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ tal que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t(\tau, \sigma_n) = t(\tau, Z), \text{ para toda permutação } \tau.$$

Além disso, para toda permutação limite $Z : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$, existe uma sequência convergente de permutações (σ_n) que converge para ela.

4.6 Unicidade do Objeto Limite

Nosso resultado principal das seções anteriores é bastante geral e é bastante semelhante aos resultados obtidos por Lovász e Szegedy [46] para grafos densos. Seria interessante, no entanto, se provássemos algo sobre a unicidade do objeto limite de sequências convergentes de permutações, assim como é feito por Borgs et al. em [13]. Por exemplo, podem haver dois objetos limites diferentes

para uma sequência convergente? Claro que sim, pois a alteração de uma única fda afetará apenas um conjunto de medida nula.

Em [13], é provada a unicidade do objeto limite no caso de sequências convergentes de grafos. Essa unicidade é baseada em uma distância entre os *graphons*, de tal forma que dois *graphons* tem distância 0 se e só se a densidade de homomorfismos de H é igual nos dois *graphons* para todo grafo H . Com isso e tendo em vista a Definição 23, definimos a distância retangular entre duas permutações limite.

Definição 50 (Distância retangular entre permutações limite). *Dadas permutações limite $Z_1, Z_2 : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$, definimos a distância retangular entre Z_1 e Z_2 como*

$$d_{\square}(Z_1, Z_2) = \sup_{\substack{x_1 < x_2 \in [0,1] \\ \alpha_1 < \alpha_2 \in [0,1]}} \left| \int_{x_1}^{x_2} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} Z_1(x, d\alpha) dx - \int_{x_1}^{x_2} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} Z_2(x, d\alpha) dx \right| \quad (4.19)$$

Para simplificar a notação, escreveremos simplesmente

$$d_{\square}(Z_1, Z_2) = \sup_{\substack{x_1 < x_2 \in [0,1] \\ \alpha_1 < \alpha_2 \in [0,1]}} \left| \int_{x_1}^{x_2} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} (Z_1 - Z_2)(x, d\alpha) dx \right|$$

Observe que podemos estender automaticamente esta definição para funções $Z : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ que satisfazem apenas a condição (a) da Definição 35. Isso é útil pois podemos aplicar esta distância para funções Z_Q provenientes de permutações ponderadas Q (que por sua vez também podem ser matrizes de adjacência Q_{σ} provenientes de permutações σ de inteiros).

Dada uma permutação ponderada Q e uma permutação limite Z , podemos definir a distância $d_{\square}(Z, Q) = d_{\square}(Z, Z_Q)$. Podemos fazer o mesmo para distância entre uma permutação σ e uma permutação limite Z , tomando $d_{\square}(Z, \sigma) = d_{\square}(Z, Z_{Q_{\sigma}})$.

O lema abaixo relaciona a distância retangular e a densidade de subpermutações em permutações limite. É o análogo do Lema 29 e possui uma prova muito semelhante.

Lema 51. *Fixe uma permutação $\tau : \mathbb{Z}_m \rightarrow \mathbb{Z}_m$ qualquer. Então, dadas duas permutações limite $Z_1, Z_2 : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$, temos*

$$|t(\tau, Z_1) - t(\tau, Z_2)| \leq m^2 \cdot d_{\square}(Z_1, Z_2)$$

Prova. Fixe $\tau : \mathbb{Z}_m \rightarrow \mathbb{Z}_m$. Da Definição 43 de densidade de subpermutações em permutações limite, é fácil ver que vale a equação abaixo, por causa de sucessivos cancelamentos.

$$\left| t(\tau, Z_1) - t(\tau, Z_2) \right| = m! \left| \sum_{k=1}^m (Y_k - Y_{k-1}) \right| \leq m! \sum_{k=1}^m |Y_k - Y_{k-1}|, \quad (4.20)$$

onde, para $0 \leq k \leq m$,

$$Y_k = \int_{[0,1]_o^m} \left(\int_{[0,1]_o^m} Z_1(x_1, d\alpha_{\tau(1)}) \dots Z_1(x_k, d\alpha_{\tau(k)}) Z_2(x_{k+1}, d\alpha_{\tau(k+1)}) \dots Z_2(x_m, d\alpha_{\tau(m)}) \right) dx_1 \dots dx_m$$

Fixe $1 \leq k \leq m$. Seja $x^* = (x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_m) \in [0, 1]^{m-1}$. Seja $z(x^*)$ a medida produto das medidas provenientes das fdas $Z_1(x_1), \dots, Z_1(x_{k-1}), Z_2(x_{k+1}), \dots, Z_2(x_m)$. Fazendo $x_0 = \alpha_0 = 0$ e $x_{m+1} = \alpha_{m+1} = 1$, temos por Fubini que

$$Y_k = \int_{[0,1]_o^{m-1}} \int_{[0,1]_o^{m-1}} \left(\int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} \int_{\alpha_{\tau(k)-1}}^{\alpha_{\tau(k)+1}} Z_1(x_k, d\alpha_{\tau(k)}) dx_k \right) dz(x^*) dx^*$$

Observe também que

$$Y_{k-1} = \int_{[0,1]_o^{m-1}} \int_{[0,1]_o^{m-1}} \left(\int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} \int_{\alpha_{\tau(k)-1}}^{\alpha_{\tau(k)+1}} Z_2(x_k, d\alpha_{\tau(k)}) dx_k \right) dz(x^*) dx^*$$

Portanto

$$\begin{aligned} |Y_k - Y_{k-1}| &= \left| \int_{[0,1]_o^{m-1}} \int_{[0,1]_o^{m-1}} \left(\int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} \int_{\alpha_{\tau(k)-1}}^{\alpha_{\tau(k)+1}} (Z_1 - Z_2)(x_k, d\alpha_{\tau(k)}) dx_k \right) dz(x^*) dx^* \right| \\ &\leq \int_{[0,1]_o^{m-1}} \int_{[0,1]_o^{m-1}} \left| \int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} \int_{\alpha_{\tau(k)-1}}^{\alpha_{\tau(k)+1}} (Z_1 - Z_2)(x_k, d\alpha_{\tau(k)}) dx_k \right| dz(x^*) dx^* \\ &\leq \int_{[0,1]_o^{m-1}} \int_{[0,1]_o^{m-1}} \left(d_{\square}(Z_1, Z_2) \right) dz(x^*) dx^* \leq \frac{1}{(m-1)!} d_{\square}(Z_1, Z_2). \end{aligned}$$

Finalmente, como desejado,

$$\left| t(\tau, Z_1) - t(\tau, Z_2) \right| \leq m! \cdot m \cdot \frac{1}{(m-1)!} d_{\square}(Z_1, Z_2) = m^2 \cdot d_{\square}(Z_1, Z_2).$$

□

O lema abaixo mostra que a distância retangular entre permutações limite Z e permutações Z -aleatórias tende a 0 (ver Teorema 2.9 e 4.7 de [13] para o caso de grafos). Esse resultado é utilizado para provar a volta do Lema 51. Ou seja, quanto menor as densidades de subpermutações, menor a distância retangular. Na prova deste lema, recebemos mais uma grande ajuda de Carlos Gustavo Moreira [48], IMPA, a quem somos imensamente gratos.

Lema 52 (Distância entre permutações limite e uma amostra). *Seja Z uma permutação limite. Então, com probabilidade 1, a sequência $(\sigma(n, Z))$ é tal que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_{\square}(Z, \sigma(n, Z)) = 0$$

Prova. Fixe $n > 10^8$. Gere $\sigma = \sigma(n, Z)$. Relembre da Definição 46 os pares (X_k, a_k) , $k = 1, 2, \dots, n$, e as permutações $R, S : \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_n$ tais que $\sigma = S \cdot R^{-1}$. Fixe $x_1 < x_2 \in [0, 1]$ e $\alpha_1 < \alpha_2 \in [0, 1]$. Seja $L(\sigma)$ o número de elementos $k \in [n]$ tais que $x_1 n < R_k \leq x_2 n$ e $\alpha_1 n < S_k \leq \alpha_2 n$.

Note que, se $\sigma(i) = j$ para $i \in [\lfloor x_1 n \rfloor + 1, \lfloor x_2 n \rfloor]$ e $j \in [\lfloor \alpha_1 n \rfloor + 1, \lfloor \alpha_2 n \rfloor]$, então $\sigma(i) = S(R^{-1}(i)) = S(k) = j$ para $k \in [n]$ tal que $R(k) = i$ e $S(k) = j$. Portanto, é fácil ver que

$$L(\sigma) = \sum_{i=\lfloor x_1 n \rfloor + 1}^{\lfloor x_2 n \rfloor} \sum_{j=\lfloor \alpha_1 n \rfloor + 1}^{\lfloor \alpha_2 n \rfloor} (Q_{\sigma}(i, j) - Q_{\sigma}(i, j-1)).$$

Pela definição de $Z_{\sigma} = Z_{Q_{\sigma}}$, temos (lembre que Q_{σ} contém apenas 0 e 1)

$$L(\sigma) = n \cdot \int_{\lfloor x_1 n \rfloor / n}^{\lfloor x_2 n \rfloor / n} \int_{\lfloor \alpha_1 n \rfloor / n}^{\lfloor \alpha_2 n \rfloor / n} Z_{\sigma}(x, d\alpha) dx = n \cdot \int_{x_1}^{x_2} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} Z_{\sigma}(x, d\alpha) dx \pm 4 \quad (4.21)$$

Para $k \in [n]$, considere o evento $A_k = (x_1 n < R_k \leq x_2 n \text{ e } \alpha_1 n < S_k \leq \alpha_2 n)$. Sabe-se [23] segundo estatística de ordem que, em uma distribuição uniforme de n elementos em $[0, 1]$, o k -ésimo menor elemento segue a distribuição Beta($k, n - k + 1$) para todo $k \in [n]$, significando que tem média $k/(n + 1)$ e variância menor que $1/n$. Observe então que, nos pares (X_k, a_k) , $k \in [n]$, a distribuição dos elementos (X_1, \dots, X_n) é uniforme por definição. Além disso, a distribuição dos elementos (a_1, \dots, a_n) também é uniforme, pois pela Definição 35(b) temos que

$$\int_0^1 \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} Z(x, d\alpha) dx = \int_0^1 (Z(x, \alpha_2) - Z(x, \alpha_1)) dx = \alpha_2 - \alpha_1.$$

Com isso, o $\lfloor x_1 n \rfloor$ -ésimo menor elemento de R está cada vez mais concentrado em x_1 para n grande. Aplicando Chebyshev, temos que uma variação de mais de $n^{-1/4}$ ocorre com probabilidade menor que $n^{-1/2}$. O mesmo vale para o $\lfloor x_2 n \rfloor$ -ésimo menor elemento de R . O mesmo também vale para os $\lfloor \alpha_1 n \rfloor$ -ésimo e $\lfloor \alpha_2 n \rfloor$ -ésimo menores elementos de S .

Seja D o evento dos $\lfloor x_1 n \rfloor$ -ésimo e $\lfloor x_2 n \rfloor$ -ésimo menores elementos de R e os $\lfloor \alpha_1 n \rfloor$ -ésimo e $\lfloor \alpha_2 n \rfloor$ -ésimo menores elementos de S não variarem mais de $n^{-1/4}$ de suas médias. Pelo exposto, $\mathbb{P}(D) \geq 1 - 4n^{-1/2}$. Temos então que, para todo $k \in [n]$

$$\mathbb{P}(A_k) = \mathbb{P}(A_k | D) \cdot \mathbb{P}(D) + \mathbb{P}(A_k | \bar{D}) \cdot \mathbb{P}(\bar{D}) \quad (4.22)$$

Sejam $x_1^- = x_1 - n^{-1/4}$, $x_1^+ = x_1 + n^{-1/4}$, $x_2^- = x_2 - n^{-1/4}$, $x_2^+ = x_2 + n^{-1/4}$, $\alpha_1^- = \alpha_1 - n^{-1/4}$, $\alpha_1^+ = \alpha_1 + n^{-1/4}$, $\alpha_2^- = \alpha_2 - n^{-1/4}$ e $\alpha_2^+ = \alpha_2 + n^{-1/4}$. Considere os eventos E_1 e E_2 abaixo. Claramente, $\mathbb{P}(A_k | D) \geq \mathbb{P}(E_1 | D)$ e $\mathbb{P}(A_k | D) \leq \mathbb{P}(E_2 | D)$.

$$E_1 = \left(x_1^+ < X_k \leq x_2^- \text{ e } \alpha_1^+ < a_k \leq \alpha_2^- \right) \quad \text{e} \quad E_2 = \left(x_1^- < X_k \leq x_2^+ \text{ e } \alpha_1^- < a_k \leq \alpha_2^+ \right)$$

Note ainda que $\mathbb{P}(E_1 | D) = \mathbb{P}(E_1, D) / \mathbb{P}(D) = (\mathbb{P}(E_1) - \mathbb{P}(E_1, \bar{D})) / \mathbb{P}(D) \geq (\mathbb{P}(E_1) - \mathbb{P}(\bar{D})) / \mathbb{P}(D)$. Além disso, $\mathbb{P}(E_2 | D) = \mathbb{P}(E_2, D) / \mathbb{P}(D) \leq \mathbb{P}(E_2) / \mathbb{P}(D)$. Como $n > 10^8$ e $\mathbb{P}(\bar{D}) \leq 4n^{-1/2}$, temos

$$\mathbb{P}(E_1 | D) \geq \mathbb{P}(E_1) - 5n^{-1/2} \quad \text{e} \quad \mathbb{P}(E_2 | D) \leq \mathbb{P}(E_2) + 5n^{-1/2}$$

Portanto, de 4.22, temos $\mathbb{P}(A_k) \geq \mathbb{P}(E_1 | D) - 4n^{-1/2} \geq \mathbb{P}(E_1) - 9n^{-1/2}$. Além disso, temos que $\mathbb{P}(A_k) \leq \mathbb{P}(E_2 | D) + 4n^{-1/2} \leq \mathbb{P}(E_2) + 9n^{-1/2}$. Note ainda que

$$\int_{x_1}^{x_2} \int_{\alpha_1^-}^{\alpha_1^+} Z(x, d\alpha) dx \leq \int_0^1 \int_{\alpha_1^-}^{\alpha_1^+} Z(x, d\alpha) dx = \alpha_1^+ - \alpha_1^- = 2n^{-1/4} \quad (4.23)$$

Com isso,

$$\mathbb{P}(E_1) = \int_{x_1^+}^{x_2^-} \int_{\alpha_1^+}^{\alpha_2^-} Z(x, d\alpha) dx = \int_{x_1}^{x_2} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} Z(x, d\alpha) dx \pm 4n^{-1/4}$$

O mesmo vale para $\mathbb{P}(E_2)$. Portanto,

$$\mathbb{P}(A_k) = \int_{x_1}^{x_2} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} Z(x, d\alpha) dx \pm (4n^{-1/4} + 9n^{-1/2}).$$

Seja I_k a variável indicadora do evento A_k . Logo $\mathbb{E}(I_k) = \mathbb{P}(A_k)$. Portanto $L(\sigma) = \sum_{k \in [n]} I_k$. Obtemos então, pela linearidade da esperança, que

$$\mathbb{E}\left(L(\sigma(n, Z))\right) = \sum_{k \in [n]} \mathbb{E}(I_k) = n \cdot \mathbb{P}(A_k).$$

Usando argumentos idênticos ao da prova do Lema 47, podemos obter um martingal Y_0, \dots, Y_n tal que $Y_i = \mathbb{E}\left(L(\sigma) \mid \sigma(1), \dots, \sigma(i)\right)$. Com isso, $Y_0 = \mathbb{E}\left(L(\sigma)\right)$ e $Y_n = \mathbb{E}\left(L(\sigma) \mid \sigma(1), \dots, \sigma(n)\right) = L(\sigma)$. Como $|Y_{i+1} - Y_i| \leq 1$, temos pela desigualdade de Azuma (Teorema 69) que

$$\mathbb{P}\left(\left|L(\sigma(n, Z)) - \mathbb{E}(L(\sigma(n, Z)))\right| > \varepsilon n\right) = \mathbb{P}\left(\left|Y_n - Y_0\right| > \varepsilon n\right) \leq 2 \exp\left\{-\varepsilon^2 n/2\right\}.$$

Como $n > 10^8$, temos que $4n^{-1/4} + 9n^{-1/2} + 4n^{-1} < 5n^{-1/4}$, e portanto

$$\mathbb{P}\left(\left|\int_{x_1}^{x_2} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} Z_\sigma(x, d\alpha) dx - \int_{x_1}^{x_2} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} Z(x, d\alpha) dx\right| > \varepsilon + 5n^{-1/4}\right) \leq 2 \exp\left\{-\varepsilon^2 n/2\right\}.$$

Tomando $x_1, x_2, \alpha_1, \alpha_2 \in [0, 1]$ no conjunto $V_n = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1\}$, temos que

$$\mathbb{P}\left(\exists x_1 < x_2, \alpha_1 < \alpha_2 \in V_n, \left|\int_{x_1}^{x_2} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} (Z_\sigma - Z)(x, d\alpha) dx\right| > \varepsilon + 5n^{-1/4}\right) \leq 2 \binom{n}{2} \exp\left\{-\varepsilon^2 n/2\right\}.$$

Fixe $\varepsilon > 0$. Seja B_n o evento

$$B_n = \left(\exists x_1 < x_2, \alpha_1 < \alpha_2 \in [0, 1], \left|\int_{x_1}^{x_2} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} (Z_\sigma - Z)(x, d\alpha) dx\right| > \varepsilon + 6n^{-1/4}\right).$$

Portanto, de 4.23,

$$\mathbb{P}(B_n) \leq 2 \binom{n}{2} \exp\left\{-\varepsilon^2 n/2\right\} \leq \exp\left\{-\varepsilon^2 n/2 + 4 \ln(n)\right\}.$$

Em outras palavras, temos que

$$\mathbb{P}\left(d_\square(Z, \sigma(n, Z)) > \varepsilon + 6n^{-1/4}\right) \leq \exp\left\{-\varepsilon^2 n/2 + 4 \ln(n)\right\}. \quad (4.24)$$

Por Borel-Cantelli, temos que a probabilidade de que B_n , $n = 1, 2, \dots$, ocorre para infinitos valores de n é nula. Como isso vale para todo $\varepsilon > 0$, então $d_\square(Z, \sigma(n, Z)) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) com probabilidade

1. □

Lema 53. *Sejam Z_1 e Z_2 permutações limite tais que $|t(\tau, Z_1) - t(\tau, Z_2)| \leq 1/(m+1)!$ para todo $m > 0$ e $\tau : \mathbb{Z}_m \rightarrow \mathbb{Z}_m$. Então $d_{\square}(Z_1, Z_2) = 0$.*

Prova. Fixe $\varepsilon > 0$. Tome $m > 3/\varepsilon$. Como $\mathbb{P}(\sigma(m, Z_1) = \tau) = t(\tau, Z_1)$, para todo $\tau : \mathbb{Z}_m \rightarrow \mathbb{Z}_m$, temos que

$$\sum_{\tau: \mathbb{Z}_m \rightarrow \mathbb{Z}_m} \left| \mathbb{P}(\sigma(m, Z_1) = \tau) - \mathbb{P}(\sigma(m, Z_2) = \tau) \right| \leq m! \frac{1}{(m+1)!} \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

De maneira idêntica a feita por Borgs et al. na prova do Teorema 3.7(b) de [13], podemos acoplar $\sigma(m, Z_1)$ e $\sigma(m, Z_2)$ de tal forma que $\sigma(m, Z_1) \neq \sigma(m, Z_2)$ com probabilidade menor que $\varepsilon/3$.

Para isso, podemos gerar $\sigma(m, Z_1)$ e $\sigma(m, Z_2)$ de forma que, para toda permutação $\tau : \mathbb{Z}_m \rightarrow \mathbb{Z}_m$, $\mathbb{P}(\sigma(m, Z_1) = \tau \ \& \ \sigma(m, Z_2) = \tau)$ é igual ao menor valor entre $\mathbb{P}(\sigma(m, Z_1) = \tau)$ e $\mathbb{P}(\sigma(m, Z_2) = \tau)$.

Pelo Lema 52, podemos tomar m grande o suficiente tal que $\mathbb{E}(d_{\square}(Z_1, \sigma(m, Z_1))) \leq \varepsilon/3$ e $\mathbb{E}(d_{\square}(Z_2, \sigma(m, Z_2))) \leq \varepsilon/3$. Portanto,

$$d_{\square}(Z_1, Z_2) \leq \mathbb{E}(d_{\square}(Z_1, \sigma(m, Z_1))) + \mathbb{E}(d_{\square}(\sigma(m, Z_1), \sigma(m, Z_2))) + \mathbb{E}(d_{\square}(\sigma(m, Z_2), Z_2)) \leq \varepsilon$$

Como isso vale para todo $\varepsilon > 0$, temos que $d_{\square}(Z_1, Z_2) = 0$. □

Corolário 54. *$d_{\square}(Z_1, Z_2) = 0$ se e só se $t(\tau, Z_1) = t(\tau, Z_2)$ para toda permutação τ . Além disso, seja (σ_n) uma sequência convergente de permutações tal que $\sigma_n \rightarrow Z_1$. Então $\sigma_n \rightarrow Z_2$ se e só se $d_{\square}(Z_1, Z_2) = 0$.*

Prova. Segue direto dos Lemas 51 e 53. □

4.7 Testabilidade em Permutações

Testabilidade já foi mencionada brevemente na Introdução. Seguindo de perto várias idéias de Borgs et al. [13], estaremos interessados em testabilidade de parâmetros de permutações. Dada uma permutação $\sigma : \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_n$, desejamos estimar algum parâmetro $f(\sigma)$ de σ , como número de pontos fixos, número de ciclos, tamanho máximo de uma subpermutação ordenada, e etc.

Definição 55. Dados inteiros $k < n$ e uma permutação $\sigma : \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_n$, seja $sub(k, \sigma)$ a subpermutação aleatória de \mathbb{Z}_k em \mathbb{Z}_k obtida da seguinte maneira: Escolha aleatória e uniformemente um subconjunto $S = \{s_1 < \dots < s_k\}$ de tamanho k em $[n]$. A ordem determinada pela sequência $(\sigma(s_1), \dots, \sigma(s_k))$ é a permutação $sub(k, \sigma) : \mathbb{Z}_k \rightarrow \mathbb{Z}_k$.

O resultado abaixo é um corolário do Lema 52 e é semelhante ao Teorema 2.9 de Borgs et al. [13].

Corolário 56. Dados $k > 10^8$ e uma permutação $\pi : \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_n$, onde $n > e^k$, então com probabilidade maior que $1 - 2 \exp\{-\sqrt{k}/3\}$, temos que $d_{\square}(\pi, sub(k, \pi)) \leq 7k^{-1/4}$.

Prova. Um modo equivalente para se gerar $sub(k, \pi)$ é gerar $\sigma(k, Z_{\pi})$ como no Lema 52, mas condicionado ao evento E de que não há dois elementos X_i e X_j em um mesmo intervalo do tipo $[\frac{b-1}{n}, \frac{b}{n}]$ para $b \in [n]$. É fácil ver que $\mathbb{P}(E) \geq \left(1 - \frac{k}{n}\right)^k \geq 1 - \frac{k^2}{n} \geq 1 - \exp\{-k/2\}$. Podemos então seguir toda a prova do Lema 52 condicionado ao evento E e concluir pela equação 4.24, para $\varepsilon = k^{-1/4}$, que $\mathbb{P}\left(d_{\square}(Z_{\pi}, \sigma(k, Z_{\pi})) > 7k^{-1/4} \mid E\right) \leq \exp\{-\sqrt{k}/3\}$. Logo, $\mathbb{P}\left(d_{\square}(\pi, sub(k, \pi)) > 7k^{-1/4} \mid E\right) \leq \exp\{-\sqrt{k}/3\}$. Portanto,

$$\mathbb{P}\left(d_{\square}(\pi, sub(k, \pi)) > 7k^{-1/4}\right) \leq \exp\{-\sqrt{k}/3\} + (1 - \mathbb{P}(E)).$$

□

Definição 57. Um parâmetro f de permutações é testável se, para todo $\varepsilon > 0$, existem inteiros $k < n_0$ tais que, se $\sigma : \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_n$ é uma permutação, onde $n > n_0$, então podemos computar uma estimativa \tilde{f} de f a partir da subpermutação aleatória $sub(k, \sigma)$ tal que

$$\mathbb{P}\left(|f(\sigma) - \tilde{f}| > \varepsilon\right) \leq \varepsilon,$$

onde $\tilde{f} = f(sub(k, \sigma))$.

O resultado abaixo é o análogo para permutações do Teorema 6.1 de [13] para grafos.

Lema 58. Seja f um parâmetro limitado de permutações. Se f é testável então, para toda sequência convergente (σ_n) de permutações, temos que $(f(\sigma_n))$ converge, ou seja, existe o limite $\lim_{n \rightarrow \infty} f(\sigma_n)$.

Prova. Como f é testável, é fácil ver pela Definição 57 que para todo ε , existem $k < n_0$ tais que, se

$\sigma : \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_n$ é uma permutação onde $n > n_0$, então

$$\left| f(\sigma) - \mathbb{E}(f(\text{sub}(k, \sigma))) \right| \leq \varepsilon.$$

Fixe então ε e sejam k e n_0 obtidos como acima. Seja (σ_n) uma sequência convergente de permutações. Logo para toda permutação $\tau : \mathbb{Z}_k \rightarrow \mathbb{Z}_k$ existe o limite $t(\tau)$ de $t(\tau, \sigma_n)$, para $n \rightarrow \infty$.

Portanto

$$\mathbb{P}(\text{sub}(k, \sigma_n) = \tau) = t(\tau, \sigma_n) \rightarrow t(\tau).$$

Com isso, como f é limitado

$$\mathbb{E}(f(\text{sub}(k, \sigma_n))) \rightarrow \sum_{\tau: \mathbb{Z}_k \rightarrow \mathbb{Z}_k} t(\tau) \cdot f(\tau) = a_k.$$

Assim, temos que para n suficientemente grande,

$$|f(\sigma_n) - a_k| \leq |f(\sigma_n) - \mathbb{E}(f(\text{sub}(k, \sigma_n)))| + \varepsilon \leq 2\varepsilon.$$

Portanto, $f(\sigma_n)$ varia menos do que 4ε para n grande. Como isso vale para todo $\varepsilon > 0$, temos que $(f(\sigma_n))$ é uma sequência de Cauchy e portanto é convergente. \square

O lema abaixo mostra a volta do lema acima (semelhante ao Teorema 6.1 de [13] para grafos).

Lema 59. *Seja f um parâmetro limitado de permutações. Assim, se $(f(\sigma_n))$ converge para toda sequência convergente (σ_n) de permutações, então f é testável.*

Prova. Afirmamos que para todo $\varepsilon > 0$, existe δ e n_0 tais que, se σ e σ' são permutações com mais de n_0 elementos tais que $d_{\square}(\sigma, \sigma') < \delta$, então $|f(\sigma) - f(\sigma')| < \varepsilon$.

Caso contrário, existe $\varepsilon > 0$ e duas sequências (σ_n) e (σ'_n) , $n \rightarrow \infty$, tais que $d_{\square}(\sigma_n, \sigma'_n) \rightarrow 0$, mas $|f(\sigma_n, \sigma'_n)| > \varepsilon$. Podemos assumir por um argumento de diagonalização que (σ_n) e (σ'_n) são convergentes. Como $d_{\square}(\sigma_n, \sigma'_n) \rightarrow 0$, temos que a sequência composta $(\sigma_1, \sigma'_1, \sigma_2, \sigma'_2, \dots)$ também é convergente. Isso é uma contradição, pois, pelo enunciado, $(f(\sigma_1), f(\sigma'_1), f(\sigma_2), f(\sigma'_2), \dots)$ também converge.

Suponha que f não é testável. Então existe $\varepsilon > 0$ e uma sequência (σ_n) de permutações com $|\sigma_n| \geq e^n$ tal que $|f(\sigma_n) - f(\text{sub}(n, \sigma_n))| > \varepsilon$ com probabilidade maior que ε para todo n .

Tome, do 1º parágrafo, δ e n_0 tais que $|f(\sigma) - f(\sigma')| < \varepsilon$ se $d_{\square}(\sigma, \sigma') < \delta$. Pelo Corolário 56, temos que, para n grande, $d_{\square}(\sigma_n, \text{sub}(n, \sigma_n)) < \delta$ com probabilidade maior que $1 - \varepsilon/2$. Então, temos uma contradição, pois, do 1º parágrafo, $|f(\sigma_n) - f(\text{sub}(n, \sigma_n))| < \varepsilon$ para n grande, com probabilidade maior que $1 - \varepsilon/2$. \square

Corolário 60. *Dada uma sequência de permutações (π_n) que converge para uma permutação limite Z , então $d_{\square}(\pi_n, Z)$ converge para 0.*

Prova. Fixe $\varepsilon > 0$. Note que, para todo $k > 1$ e $\tau : \mathbb{Z}_k \rightarrow \mathbb{Z}_k$, temos que $\mathbb{P}(\sigma(k, Z) = \tau) = t(\tau, Z)$ e $\mathbb{P}(\text{sub}(k, \pi_n) = \tau) = t(\tau, \pi_n)$. Portanto, como $t(\tau, \pi_n) \rightarrow t(\tau, Z)$, temos que para n grande

$$\sum_{\tau: \mathbb{Z}_k \rightarrow \mathbb{Z}_k} \left| \mathbb{P}(\sigma(k, Z) = \tau) - \mathbb{P}(\text{sub}(k, \pi_n) = \tau) \right| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

De maneira idêntica a feita por Borgs et al. na prova do Teorema 3.7(b) de [13], podemos acoplar $\sigma(k, Z)$ e $\text{sub}(k, \pi_n)$ de tal forma que $\sigma(k, Z) \neq \text{sub}(k, \pi_n)$ com probabilidade menor que $\varepsilon/3$. Pelo Lema 52, temos que $\mathbb{E}(d_{\square}(Z, \sigma(k, Z))) \leq \varepsilon/3$ para k grande. Pelo Corolário 56, podemos tomar k grande o suficiente tal que, para n grande onde $|\pi_n| > e^k$, temos que $\mathbb{E}(d_{\square}(\pi_n, \sigma(k, \pi_n))) \leq \varepsilon/3$. Portanto, para k e n suficientemente grandes

$$d_{\square}(\pi_n, Z) \leq \mathbb{E}(d_{\square}(\pi_n, \text{sub}(k, \pi_n))) + \mathbb{E}(d_{\square}(\text{sub}(k, \pi_n), \sigma(k, Z))) + \mathbb{E}(d_{\square}(\sigma(k, Z), Z)) \leq \varepsilon$$

Como isso vale para todo $\varepsilon > 0$, temos que $d_{\square}(\pi_n, Z) \rightarrow 0$. \square

O Corolário 61 abaixo é uma aplicação do Lema 58. Ele prova a não-testabilidade de três parâmetros de permutações. Seja $\sigma : \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_n$ uma permutação. Seja $pf(\sigma)$ a densidade de pontos fixos de σ , ou seja, o número de índices $i \in [n]$ tais que $\sigma(i) = i$ dividido por n . Seja $cic(\sigma)$ o número de ciclos de σ dividido por n . Um ciclo de σ é um subconjunto $\{c_1, \dots, c_k\} \subseteq [n]$ tal que $\sigma(c_k) = c_1$ e $\sigma(c_i) = c_{i+1}$, para todo $i \in [n-1]$. Seja $ordmax(\sigma)$ o tamanho máximo de uma subsequência ordenada dividido por n .

Corolário 61. *A densidade de pontos fixos $pf(\cdot)$, a densidade de ciclos $cic(\cdot)$ e a densidade da subsequência ordenada máxima $ordmax(\cdot)$ são parâmetros não-testáveis de permutações.*

Prova. Para todo $n > 0$, sejam $\sigma_n = (1, 2, 3, \dots, n)$ e $\sigma'_n = (n, 1, 2, 3, \dots, n-1)$. É fácil ver que (σ_n) e (σ'_n) são sequências convergentes de permutações, pois $t(\tau, \sigma'_n) \rightarrow t(\tau, \sigma_n) = 1$ se τ é ordenada, e $t(\tau, \sigma'_n) \rightarrow t(\tau, \sigma_n) = 0$ caso contrário.

Observe, no entanto, que nenhum ponto de σ'_n é fixo, mas todos os de σ_n são. Ou seja, $pf(\sigma_n) = 1$ e $pf(\sigma'_n) = 0$ para todo $n > 0$. Observe ainda que todo ponto de σ_n forma um ciclo de tamanho 1 (pois são pontos fixos). Mas σ'_n tem apenas um ciclo de tamanho n , a saber, $(n, n-1, n-2, \dots, 2, 1)$. Ou seja, $cic(\sigma_n) = 1$ e $cic(\sigma'_n) = 1/n$ para todo $n > 0$.

Seja $(\sigma''_n) = (\sigma_1, \sigma'_2, \sigma_3, \sigma'_4, \dots)$ a sequência de permutações obtida intercalando as sequências (σ_n) e (σ'_n) . Claramente (σ''_n) é convergente, mas $pf(\sigma''_n)$ e $cic(\sigma''_n)$ não convergem. Logo, pelo Lema 58, $pf(\cdot)$ e $cic(\cdot)$ não são parâmetros testáveis.

Para todo $n > 0$, seja ainda $\pi_n : \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_n$ tal que $\pi_n(1) = 1$, $\pi_n(i) = i+1$ (para $i < n$ par), $\pi_n(i) = i-1$ (para $i > 1$ ímpar) e $\pi_n(n) = n$ (se n é par). Por exemplo, $\pi_8 = (1, 3, 2, 5, 4, 7, 6, 8)$ e $\pi_9 = (1, 3, 2, 5, 4, 7, 6, 9, 8)$. É fácil ver que (π_n) é convergente, pois o número de inversões (subpermutações $(2, 1)$) é igual a $\lfloor (n-1)/2 \rfloor$. Dividindo por $\binom{n}{2}$, temos que $t((2, 1), \pi_n) \rightarrow 0$. Portanto, $t(\tau, \pi_n) \rightarrow t(\tau, \sigma_n) = 1$ se τ é ordenada, e $t(\tau, \pi_n) \rightarrow t(\tau, \sigma_n) = 0$ caso contrário.

Note ainda que, para todo $n > 0$, $ordmax(\sigma_n) = 1$, mas $ordmax(\pi_n) = \lfloor (n+1)/2 \rfloor / n \rightarrow 1/2$. Seja $(\pi'_n) = (\sigma_1, \pi_2, \sigma_3, \pi_4, \dots)$ a sequência de permutações obtida intercalando as sequências (σ_n) e (π_n) . Claramente (π'_n) é convergente, mas $ordmax(\pi'_n)$ não converge. Logo, pelo Lema 58, $ordmax(\cdot)$ não é testável. \square

Este corolário é interessante, pois o senso comum nos diz que é fácil estimar a densidade de pontos fixos de uma permutação. Basta selecionar pontos aleatórios e contar quantos deles são fixos. No entanto, em nossa definição de testabilidade para permutações, ao tomarmos uma subpermutação nós perdemos a informação de cada ponto na permutação original. Por exemplo, dada a permutação $(6, 1, 2, 3, 4, 5)$ sem pontos fixos, se selecionamos aleatoriamente as posições 2, 4 e 6, teremos a subsequência $(1, 3, 5)$, que gerará a subpermutação $(1, 2, 3)$, com três pontos fixos. Problema semelhante ocorre na estimação do número de ciclos, devido a perda da informação de cada ponto na permutação original.

Outros parâmetros interessantes de permutações podem ser estudados com relação a sua testabilidade. Seja S_n o conjunto de todas as permutações de \mathbb{Z}_n em \mathbb{Z}_n . Dada uma métrica d em S_n , o peso $w_d(\pi)$ de uma permutação $\pi \in S_n$ é definido como $w_d(\pi) = d(\pi, e)$, onde $e = (1, 2, \dots, n)$ é a

permutação identidade [16].

Essa noção de peso é útil para métricas d “invariantes à direita”, ou seja, métricas tais que $d(\pi, \sigma) = d(\pi\tau, \sigma\tau)$ para todo $\pi, \sigma, \tau \in S_n$, onde $\pi\tau = (\pi(\tau(1)), \pi(\tau(2)), \dots, \pi(\tau(n)))$ é uma permutação em S_n . Com isso, se d é invariante à direita, então $d(\pi, \sigma) = d(\pi\sigma^{-1}, e) = w_d(\pi\sigma^{-1})$.

Existem várias métricas invariantes à direita em S_n . Dados $\pi, \sigma \in S_n$, muitas delas contam o número mínimo de operações que levam π a σ . Entre as mais conhecidas podemos citar (juntamente com o tipo de operação permitida) [25]:

- Hamming $dh(\pi, \sigma)$: operações de substituição de um elemento.
- Ulam $du(\pi, \sigma)$: operações “*remove um elemento e insere em outra posição*”.
- Transposição $dt(\pi, \sigma)$: operações de transposição entre quaisquer dois elementos. Também é chamada distância de Cayley.
- Kendall-tau $dkt(\pi, \sigma)$: operações de transposição entre quaisquer dois elementos adjacentes.

Considere as distâncias dh , du e dt normalizadas por n e a distância dkt normalizada por $\binom{n}{2}$. Em [24] e [25], também mencionam-se outras métricas invariantes à direita em S_n , a saber:

- L_1 (ou Spearman *footrule*): $l_1(\pi, \sigma) = \binom{n}{2}^{-1} \sum_{i=1}^n |\pi(i) - \sigma(i)|$
- L_2 (ou Spearman *rank correlation*): $l_2(\pi, \sigma) = \left(\frac{n(n^2-1)}{3}\right)^{-1} \sum_{i=1}^n (\pi(i) - \sigma(i))^2$
- L_∞ : $l_\infty(\pi, \sigma) = \frac{1}{n} \max_{1 \leq i \leq n} |\pi(i) - \sigma(i)|$

Corolário 62. *Os pesos $w_{dh}(\cdot)$, $w_{du}(\cdot)$, $w_{dt}(\cdot)$ e $w_{l_\infty}(\cdot)$, referentes às distâncias de Hamming, de Ulam, de transposição e L_∞ , são parâmetros não-testáveis de permutações. O peso $w_{dkt}(\cdot)$ referente à distância Kendall-tau é um parâmetro testável de permutações.*

Prova. Em [25], constam várias relações sobre essas distâncias. Por exemplo, temos que a distância de Hamming $dh(\pi, \sigma)$ é igual a n menos o número de pontos fixos em $\pi\sigma^{-1}$. A distância de Ulam $du(\pi, \sigma)$ é igual a n menos o tamanho da subsequência crescente máxima de $\pi\sigma^{-1}$. A distância de transposição (também chamada de Cayley) $dt(\pi, \sigma)$ é igual a n menos o número de ciclos em

$\pi\sigma^{-1}$. A distância Kendall-tau (também chamada de “bubble sort”) $dkt(\pi, \sigma)$ é o número de pares $(i < j) \in [n]^2$ tais que $\pi(i) < \pi(j)$ e $\sigma(i) > \sigma(j)$ ou $\pi(i) > \pi(j)$ e $\sigma(i) < \sigma(j)$.

Temos então que $w_{dh}(\pi)$ é igual a $1 - pf(\pi)$, $w_{du}(\pi)$ é igual a $1 - ordmax(\pi)$, $w_{dt}(\pi)$ é igual a $1 - cic(\pi)$ e $w_{dkt}(\pi) = t((2, 1), \pi)$ (densidade de pares invertidos em π).

Com isso, o resultado sobre $w_{dkt}(\cdot)$ segue direto do Lema 59 e os resultados sobre $w_{dh}(\cdot)$, $w_{du}(\cdot)$ e $w_{dt}(\cdot)$ seguem direto do Corolário 61. Sobre $w_{l_\infty}(\cdot)$, basta seguir a prova do Corolário 61 e verificar que $w_{l_\infty}(\sigma''_n)$ não converge, pois $w_{l_\infty}(\sigma_n) = 0$, mas $w_{l_\infty}(\sigma'_n) = (n-1)/n \rightarrow 1$. \square

O lema abaixo segue direto do Lema 1 de [25].

Lema 63. *Dada uma permutação limite $Z : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$, temos que os pesos $w_{l_1}(\sigma(n, Z))$ e $w_{l_2}(\sigma(n, Z))$ referentes às distâncias L_1 e L_2 sobre permutações Z -aleatórias convergem para $n \rightarrow \infty$ e os limites dependem apenas de Z .*

Prova. Considere as permutações aleatórias $R, S : \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_n$, $n > 0$, obtidas da seguinte forma: sejam $((X_i, Y_i))_{i=1}^n$ pares em $[0, 1]^2$ tais que $\mathbb{P}(X_i < s, Y_i < t) = H(s, t)$, $s, t \in [0, 1]$, onde $H : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ é uma função de distribuição conjunta. Suponha, como hipótese, que $X_i \neq X_j$ e $Y_i \neq Y_j$, para todos $i < j \in [n]$. Sejam então $R, S : \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_n$ tais que, para $i \in [n]$, $R(i) = |\{j : X_j \leq X_i\}|$ e $S(i) = |\{j : Y_j \leq Y_i\}|$.

Em [25], mostra-se que $l_1(R, S)$ e $l_2(R, S)$ convergem para $n \rightarrow \infty$ e que os limites dependem apenas de H . Observe que, dada uma permutação limite $Z : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ e $n > 0$, uma permutação Z -aleatória $\sigma(n, Z)$ é obtida da mesma forma segundo a Definição 46, onde $\sigma(n, Z) = S \cdot R^{-1}$. Note que, nesse caso, a função de distribuição conjunta H pode ser obtida facilmente de Z . Além disso, o Lema 36 garante que a hipótese ocorre com probabilidade 1. \square

Acreditamos que esse lema é um passo importante para provar que os pesos $w_{l_1}(\cdot)$ e $w_{l_2}(\cdot)$ são parâmetros testáveis de permutações.

4.8 Comentários Finais

Uma primeira observação imediata e intuitiva do nosso resultado principal é que temos agora um algoritmo para geração de permutações aleatórias bastante gerais, tendo como modelo uma

permutação limite Z . Este algoritmo vem se juntar a outros mais antigos, como o de Fischer-Yates-Knuth (permutações aleatórias comuns) e o de Sattolo (permutações cíclicas aleatórias).

Como permutações limite são objetos infinitos em geral, podemos definir um modelo finito mais simples, a saber:

Definição 64 (Permutação \mathcal{F} -aleatória). *Dada uma sequência finita $\mathcal{F} = (F_1, F_2, \dots, F_k)$ de fdas contínuas tais que*

$$\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k F_i(y) = y, \text{ para todo } y \in [0, 1], \quad (4.25)$$

definimos a permutação \mathcal{F} -aleatória $\sigma(n, \mathcal{F})$ da seguinte forma: Nós geramos independentemente n números $X_1 < X_2 < \dots < X_n$ em $[0, 1]$. A permutação $\sigma(n, \mathcal{F})$ é igual a (a_1, a_2, \dots, a_n) onde, para $1 \leq i \leq n$, $a_i \in [0, 1]$ é gerado aleatoriamente segundo a fda F_j se $\frac{j-1}{k} \leq X_i < \frac{j}{k}$, onde $j \in [k]$.

É fácil ver que podemos obter de \mathcal{F} uma permutação limite $Z_{\mathcal{F}} : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$, onde $Z_{\mathcal{F}}(x, \cdot) = F_j(\cdot)$ se $x \in [\frac{j-1}{k}, \frac{j}{k})$, satisfazendo as condições da Definição 35 (por isso a importância dessas fdas serem contínuas). Com isso, nosso resultado mostra que $(\sigma(n, \mathcal{F}))$ é convergente.

Talvez seja interessante impor mais condições às funções em \mathcal{F} para facilitar futuros cálculos. Uma idéia é que as funções em \mathcal{F} sejam lineares por partes. Fixando um m , tais funções são formadas por retas entre pontos $(X_1/m, A_1/m)$ e $(X_2/m, A_2/m)$ onde $X_1, X_2, A_1, A_2 \in \{0, 1, \dots, m\}$. Com isso tais fdas são “uniformes” em certos intervalos.

Outra questão interessante é que podemos ter também uma nova definição de sequência quase-aleatória de permutações, que abrange a de Cooper [22]. Chung, Graham e Wilson [20] definem uma sequência (G_n) de grafos como quase-aleatória com densidade p ($0 < p < 1$) se, para todo grafo simples F , o número de cópias de F em G_n converge para $|V(G_n)|^{|V(F)} p^{|E(F)|}$, o mesmo que $(G(n, p))$, $n \rightarrow \infty$. Lovász e Sós [45] definem uma sequência (G_n) de grafos como H -quase-aleatória, onde H é um grafo ponderado, se, para todo grafo simples F , o número de cópias de F em G_n é assintoticamente o mesmo que o número de cópias de F em um grafo H -aleatório $G(n, H)$ (definido na Seção 3).

Com isso, podemos também definir sequência \mathcal{F} -quase-aleatória de permutações, onde \mathcal{F} é uma sequência finita de fdas contínuas satisfazendo 4.25.

Definição 65 (Sequência \mathcal{F} -quase-aleatória de permutações). *Dizemos que uma sequência (σ_n) de permutações é \mathcal{F} -quase-aleatória se $t(\tau, \sigma_n)$ converge para $t(\tau, Z_{\mathcal{F}})$ para toda permutação τ .*

Cooper define permutações quase-aleatórias [21] de outro modo (ver Introdução). Podemos dar uma definição alternativa para as permutações quase-aleatórias de Cooper e na mesma linha quase-aleatoriedade para grafos.

Corolário 66. *Uma sequência (σ_n) de permutações é quase-aleatória (no sentido de Cooper [21]) se e só se, para toda permutação $\tau : \mathbb{Z}_m \rightarrow \mathbb{Z}_m$, $t(\tau, \sigma_n)$ converge para $1/m!$.*

Prova. Se é quase-aleatória no sentido de Cooper, então obedece a condição (UB) de balanceamento (ver Seção 1.1). Segundo a Definição 22, teremos que $d_{\square}(\sigma_n, Z_u) \rightarrow 0$, onde Z_u é a permutação limite tal que todas as fdas são uniformes. Com isso, pelo Lema 51, (σ_n) é uma sequência convergente e $t(\tau, \sigma_n) \rightarrow t(\tau, Z_u) = 1/m!$, como desejado.

Se $t(\tau, \sigma_n)$ converge para $1/m!$ para toda permutação $\tau : \mathbb{Z}_m \rightarrow \mathbb{Z}_m$, então existe uma permutação limite Z tal que $t(\tau, Z) = 1/m!$ para todo τ e $d_{\square}(\sigma_n, Z) \rightarrow 0$. Pelo Corolário 54, $d_{\square}(Z, Z_u) = 0$. Portanto, $d_{\square}(\sigma_n, Z_u) \rightarrow 0$, o que satisfaz a condição (UB) de balanceamento de Cooper e a quase-aleatoriedade de (σ_n) segundo Cooper. \square

Assim, a quase-aleatoriedade de Cooper para permutações estaria contida em nossa definição de \mathcal{F} -quase-aleatoriedade, onde \mathcal{F} tem apenas uma função, a fda uniforme.

Alem disso, Chung, Graham e Wilson [20] mostram que várias propriedades de sequências de grafos “quase-aleatórias com densidade p ” são equivalentes entre si. Lovász e Sós [45] fazem o mesmo para H -quase-aleatoriedade, onde H é um grafo ponderado. Cooper [21] faz o mesmo para sequências quase-aleatórias de permutações. Seria um resultado interessante se provássemos, assim como eles, a existência de várias propriedades equivalentes para esta noção de \mathcal{F} -quase-aleatoriedade generalizada para permutações.

Outra possível aplicação se refere a uma conjectura de J.Cooper e R.L.Graham [22]. Eles definem uma sequência de permutações (σ_n) como “ m -simétrica” se, para todo $\tau : \mathbb{Z}_m \rightarrow \mathbb{Z}_m$, $t(\tau, \sigma_n)$ converge para $1/m!$. A questão é saber se, para todo $m > 2$, existe uma sequência m -simétrica que não é $(m + 1)$ -simétrica. Para $m = 2$, Cooper [22] mostra que a sequência (σ_n) , onde $\sigma_n = (n + 1, \dots, 2n, 1, \dots, n)$ é 2-simétrica, mas não contém a subpermutação $(1, 3, 2)$.

Observe que, pelo Corolário 66, uma sequência de permutações é quase-aleatória se e só se é m -simétrica para todo $m > 1$.

A questão acima motiva outra questão mais abrangente e bastante natural em problemas de

quase-aleatoriedade. Em muitos casos, uma sequência quase-aleatória é aquela em que, para toda subestrutura, o número de cópias é assintoticamente o mesmo que em sequências de estruturas aleatórias. A questão é saber se existe um conjunto finito de subestruturas tais que basta garantir essa propriedade para estas subestruturas.

Chung, Graham e Wilson [20] provam surpreendentemente que esta propriedade basta ser verificada para dois grafos K_2 e C_4 . Lovász e Sós [45] provam que esta propriedade basta ser verificada para um conjunto finito de grafos.

Formalmente, nossa conjectura pode ser colocada da seguinte forma.

Conjectura 67. *Seja $\mathcal{F} = (F_1, F_2, \dots, F_k)$ uma sequência finita de fdas contínuas satisfazendo 4.25. Existe um conjunto finito Γ de permutações tal que, se (σ_n) é uma sequência de permutações onde, para todo $\tau \in \Gamma$, $t(\tau, \sigma_n)$ é assintoticamente o mesmo que em permutações \mathcal{F} -aleatórias, então (σ_n) é \mathcal{F} -quase-aleatória?*

A prova desta conjectura é uma negação da conjectura de J.Cooper e R.L.Graham, mas é mais abrangente pois não está restrita a sequências m -simétricas de permutações. Nesse caso particular, ela diz que, existe um $M > 1$ tal que ocorre o seguinte: uma sequência de permutações é quase-aleatória se e só se é m -simétrica para todo $1 < m \leq M$.

Finalmente, outro resultado interessante seria a prova de que todo modelo razoável de permutação aleatória é uma permutação Z -aleatória para alguma permutação limite Z , faltando definir o que seria um modelo razoável. Lovász e Szegedy fazem isso para modelos de grafos aleatórios em [46].

Apêndice A

Resultados Básicos de Análise e Probabilidade

Esta seção tem como objetivo apresentar resultados básicos utilizados nessa tese. Principalmente, as desigualdades de Chebyshev, Chernoff e Azuma.

Seja X uma variável aleatória positiva. A desigualdade de Markov diz que, para todo $\beta > 0$,

$$P(X \geq \beta) \leq E(X)/\beta.$$

A desigualdade de Chebyshev diz que, para todo $\beta > 0$,

$$P(|X - E(X)| \geq \beta) \leq Var(X)/\beta^2,$$

onde $Var(X) = E(X^2) - E^2(X)$.

Se X é uma variável inteira e positiva, temos então que

$$P(X > 0) \leq E(X),$$

$$P(X = 0) \leq \frac{Var(X)}{E^2(X)}.$$

Assim, se $E(X) \rightarrow 0$, então $X = 0$ quase sempre (lembre que X é inteira). Aqui estamos considerando uma sequência infinita de X dependendo de algum parâmetro n tendendo ao infinito [4]. Se $E(X) \rightarrow \infty$, isso não significa que $X > 0$ quase sempre. Por Chebyshev, isso vale se $Var(X) = o(E^2(X))$. $Var(X)$ não é muito fácil de se calcular, mas geralmente utilizam-se os mesmos esquemas comuns que facilitam seu cálculo.

Fixe $n > 0$. Para $1 \leq i \leq n$, seja X_i a variável aleatória indicadora (0-1) de um evento A_i com probabilidade $p_i = P(A_i) = P(X_i = 1)$. Ou seja, $X_i = 1$ se A_i ocorre e, caso contrário, $X_i = 0$. Com isso,

$$\text{Var}(X_i) = p_i(1 - p_i) \leq p_i = E(X_i).$$

Se $X = X_1 + \dots + X_n$, então, como

$$\text{Var}(X) = \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i) + \sum_{i \neq j} \text{Cov}(X_i, X_j),$$

onde $\text{Cov}(X_i, X_j) = E(X_i X_j) - E(X_i)E(X_j)$, temos que

$$\text{Var}(X) \leq E(X) + \sum_{i \neq j} \text{Cov}(X_i, X_j).$$

Note que se X_i e X_j são independentes, então $\text{Cov}(X_i, X_j) = 0$. Escrevemos então $i \sim j$ se $i \neq j$ e os eventos A_i e A_j não são independentes. Note que, se $i \sim j$, então $\text{Cov}(X_i, X_j) \leq E(X_i X_j) = \text{Pr}(A_i \wedge A_j)$. Logo,

$$\text{Var}(X) \leq E(X) + \Delta,$$

onde

$$\Delta = \sum_{i \sim j} P(A_i \wedge A_j) = \sum_i P(A_i) \sum_{j \sim i} P(A_j | A_i).$$

Se X_1, \dots, X_n são simétricas (“*todos parecem a mesma coisa*”), temos que

$$\Delta^* = \sum_{j \sim i} P(A_j | A_i)$$

é o mesmo valor para todo $i = 1, \dots, n$. Com isso, $\Delta = \Delta^* E(X)$.

Com isso, se $E(X) \rightarrow \infty$ e, $\Delta = o(E^2(X))$ ou $\Delta^* = o(E(X))$, então, por Chebyshev, $X > 0$ e $X \sim E(X)$ quase sempre.

Alternativamente, a desigualdade de Chernoff diz que, se X_1, \dots, X_n são mutuamente independentes, então

$$P(|X - E(X)| > t) \leq 2 \exp\{-2t^2/n\}.$$

Por outro lado, a desigualdade de Hoeffding diz que, se X_1, \dots, X_n são independentes entre si, mas não são indicadoras (0-1), então

$$P(X - E(X) \geq t) \leq \exp \left\{ \frac{-2t^2}{\sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2} \right\},$$

onde $a_i \leq X_i \leq b_i$, $E(X_i) < \infty$ e $Var(X_i) < \infty$, para todo $i = 1, \dots, n$. Outra versão desta desigualdade diz que, se $a_i = 0$ e $b_i = 1$, para todo $i = 1, \dots, n$, então

$$P(X - E(X) \geq t) \leq \exp \left\{ \frac{-t^2}{3E(X)} \right\},$$

$$P(X - E(X) \leq -t) \leq \exp \left\{ \frac{-t^2}{2E(X)} \right\},$$

e, conseqüentemente,

$$P(|X - E(X)| \geq t) \leq 2 \exp \left\{ \frac{-t^2}{3E(X)} \right\}.$$

Uma desigualdade um pouco mais sofisticada, a desigualdade de Azuma, é obtida sobre martingais. A definição abaixo foi tirada de [36]. Sejam W , $(X_i)_{i=0}^n$ e $(Y_i)_{i=0}^n$ variáveis aleatórias em um mesmo espaço de probabilidades.

Definição 68 (Martingais). *Dizemos que $(X_i)_{i=0}^n$ é um martingal com relação à $(Y_i)_{i=0}^n$ se*

$$(a) \mathbb{E}(|X_i|) < \infty, \text{ para todo } 0 \leq i \leq n$$

$$(b) \mathbb{E}(X_{i+1} \mid Y_0, \dots, Y_i) = X_i, \text{ para todo } 0 \leq i < n$$

Se $\mathbb{E}(|W|) < \infty$, podemos obter um martingal a partir de W , chamado martingal de Doob [27], da seguinte forma: $X_i = \mathbb{E}(W \mid Y_0, \dots, Y_i)$, para todo $0 \leq i \leq n$. É fácil ver que $(X_i)_{i=0}^n$ é um martingal com relação à $(Y_i)_{i=0}^n$, pois, da propriedade da esperança condicional, temos

$$\mathbb{E}(X_{i+1} \mid Y_0, \dots, Y_i) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(W \mid Y_0, \dots, Y_{i+1}) \mid Y_0, \dots, Y_i) = \mathbb{E}(W \mid Y_0, \dots, Y_i) = X_i,$$

e da desigualdade de Jensen (módulo é uma função convexa), temos

$$\mathbb{E}(|X_i|) = \mathbb{E}\left(\left|\mathbb{E}(W|Y_0, \dots, Y_i)\right|\right) \leq \mathbb{E}\left(\mathbb{E}(|W||Y_0, \dots, Y_i)\right) = \mathbb{E}(|W|) < \infty.$$

Em muitas aplicações, como no Teorema 47, W é uma função $f(Y_1, \dots, Y_n)$, ou seja, W é determinado pelas variáveis aleatórias Y_1, \dots, Y_n . Nesse caso, $X_0 = \mathbb{E}(W)$ e $X_n = \mathbb{E}(W|Y_0, \dots, Y_n) = W$. Esse martingal vai revelando cada vez mais informação sobre a variável aleatória W .

Teorema 69 (Desigualdade de Azuma [6], [37]). *Dadas sequências de variáveis aleatórias $(X_i)_{i=0}^n$ e $(Y_i)_{i=0}^n$ em um mesmo espaço de probabilidades, tal que $(X_i)_{i=0}^n$ é um martingal com relação à $(Y_i)_{i=0}^n$ e $|X_{i+1} - X_i| \leq c$ para todo $0 \leq i < n$, então*

$$\mathbb{P}(|X_n - X_0| \geq \lambda) \leq 2 \exp\left\{\frac{-\lambda^2}{2nc^2}\right\}$$

A.1 Funções de distribuição acumulada (Fda's)

Os resultados desse capítulo seguem basicamente o clássico livro “Probability Theory I” de M.Loève [44] (cap. IV).

Seja R um espaço métrico e D um subconjunto de R . Dizemos que $x \in R$ é um ponto de acumulação de D se toda bola aberta com centro em x contém pontos de D . Dizemos que D é denso em R se todo elemento de R é ponto de acumulação de D . Os racionais, por exemplo, são densos nos reais. Seja $D \subset [0, 1]$ um conjunto denso em $[0, 1]$. Seja $F_D : D \rightarrow [0, 1]$ uma função não-decrescente tal que $F_D(0) = 0$.

Como todo ponto $a \in (0, 1)$ é um ponto de acumulação de D , podemos investigar a existência de $\lim_{x \rightarrow a} F_D(x)$. Como F_D é não-decrescente e limitada em D , o fato abaixo mostra que existe (e é único) o limite à esquerda $\lim_{x \rightarrow a^-} F_D(x)$, para $x \in D$, e é igual a $\sup_{x < a} F_D(x)$ [43]. O mesmo para o limite à direita, igual a $\inf_{x > a} F_D(x)$ (não necessariamente igual ao da esquerda).

Fato 70. *Para todo $a \in (0, 1]$, existe o limite à esquerda em a e é igual à*

$$\lim_{x \rightarrow a^-} F_D(x) = \sup\{F_D(x) : x \in D, x < a\}.$$

Para todo $a \in [0, 1)$, existe o limite à direita em a e é igual à

$$\lim_{x \rightarrow a^+} F_D(x) = \inf\{F_D(x) : x \in D, x > a\}.$$

Prova. Seja $L = \inf\{F_D(x) : x \in D, x > a\}$. Para todo $\varepsilon > 0$, existe um $0 < \delta < 1 - a$ tal que $a + \delta \in D$ e $L \leq F_D(a + \delta) < L + \varepsilon$. Como F_D é não decrescente, então todo $x \in D \cap (a, a + \delta)$ satisfaz $L \leq F_D(x) < L + \varepsilon$. Pela definição de limite à direita, $\lim_{x \rightarrow a^+} F_D(x) = L$. Análogo para o limite à esquerda. \square

Para simplificar, escrevemos

$$F_D(a-) := \lim_{\substack{x \rightarrow a^- \\ x \in D}} F_D(x) = \sup\{F(x) : x \in D, x < a\}, \quad \text{para todo } a \in (0, 1]$$

$$F_D(a+) := \lim_{\substack{x \rightarrow a^+ \\ x \in D}} F_D(x) = \inf\{F(x) : x \in D, x > a\}, \quad \text{para todo } a \in [0, 1)$$

Seja $F : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ uma função não decrescente tal que, para todo $x \in D$, $F(x) = F_D(x)$. É fácil ver [43] que F e F_D possuem os mesmos limites laterais, ou seja,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a^- \\ x \in [0, 1]}} F(x) = \lim_{\substack{x' \rightarrow a^- \\ x' \in D}} F_D(x'), \quad \text{para todo } a \in (0, 1]$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a^+ \\ x \in [0, 1]}} F(x) = \lim_{\substack{x' \rightarrow a^+ \\ x' \in D}} F_D(x'), \quad \text{para todo } a \in [0, 1) \quad (\text{A.1})$$

Dizemos que F_D é contínua à esquerda se $F(x) = F(x-)$, para todo $x \in D \setminus \{0\}$. Dizemos que F_D é descontínua em 0 se $F_D(0+) > 0$. Dizemos que F_D é descontínua em 1 se $F_D(1-) < 1$. Dizemos que F_D é descontínua em $x \in D \setminus \{0, 1\}$ se $F_D(x+) - F_D(x-) > 0$.

Uma observação simples é a seguinte.

Fato 71. *Seja $F'_D : D \rightarrow [0, 1]$ não-decrescente tal que $F'_D(0) = 0$. Se F'_D não é contínua à esquerda, então podemos obter uma função não-decrescente $F_D : D \rightarrow [0, 1]$ contínua à esquerda com $F_D(0) = 0$, fazendo $F_D(x) := F'_D(x-)$, se $x \in D \setminus \{0\}$ é um ponto de descontinuidade de F'_D .*

Abaixo definimos funções de distribuição acumulada (fda). A definição usualmente vista na

literatura [5] tem como domínio a reta real. Nossa definição é sobre o intervalo $[0, 1]$.

Definição 72. Dizemos que $F : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ é uma função de distribuição acumulada (fda) se

- (a) É não decrescente e $F(0) = 0$
- (b) É contínua à esquerda, ou seja, $F(x) = F(x-)$ para todo $x \in (0, 1]$

Uma observação importante é sobre o conjunto dos pontos de descontinuidade de uma fda.

Fato 73. Para toda fda F , o conjunto dos pontos de descontinuidade é enumerável.

Prova. Se F tem pelo menos n pontos de descontinuidade $0 \leq x_1 < x_2 < \dots < x_n \leq 1$, então

$$0 \leq F(x_1) < F(x_1+) \leq F(x_2) < F(x_2+) \leq \dots \leq F(x_n) < F(x_n+) \leq 1.$$

Seja $p(x_k) = F(x_k+) - F(x_k)$ o “salto” de cada ponto de descontinuidade. Assim

$$\sum_{k=1}^n p(x_k) = \sum_{k=1}^n (F(x_k+) - F(x_k)) \leq F(1) - F(0) = 1.$$

Portanto, para todo $0 < \varepsilon < 1$, o número de pontos de descontinuidade com saltos $p(x_k) > \varepsilon$ é menor que $1/\varepsilon$. Portanto, para todo inteiro m , o número de pontos de descontinuidade com saltos maiores que $1/m$ é finito e menor ou igual a m e, portanto, o número de pontos de descontinuidade é enumerável. \square

Abaixo definimos convergência fraca de fdas, que será bastante utilizada.

Definição 74. Dada uma fda F , seja $C(F)$ o conjunto dos seus pontos de continuidade. Dizemos que uma sequência de fdas F_n converge fracamente para uma fda F (ou simplesmente $F_n \xrightarrow{w} F$) se F_n converge em $C(F)$. Dizemos que (F_n) converge fracamente se existe uma fda F tal que $F_n \xrightarrow{w} F$.

Fato 75. O limite da convergência fraca, se existe, é único [44].

Prova. Suponha que $F_n \xrightarrow{w} F'$ e $F_n \xrightarrow{w} F''$, para fdas F' e F'' . Seja $D = C(F') \cap C(F'')$. Então $F' = F''$ nos pontos de D . Pelo Fato 73, o conjunto $[0, 1] \setminus D$ é enumerável e D é denso em $[0, 1]$. Seja $F_D : D \rightarrow [0, 1]$ tal que $F_D(x) = F'(x) = F''(x)$, para $x \in D$.

Pela continuidade à esquerda e por (A.1), temos que, para $a \in (0, 1]$,

$$F'(a) = \lim_{\substack{x \rightarrow a^- \\ x \in [0,1]}} F'(x) = \lim_{\substack{x' \rightarrow a^- \\ x' \in D}} F_D(x') = \lim_{\substack{x \rightarrow a^- \\ x \in [0,1]}} F''(x) = F''(a)$$

Logo, $F' = F''$ também nos pontos de $[0, 1] \setminus D$. □

O resultado abaixo diz que se uma sequência de fdas (F_n) converge pontualmente em um conjunto denso de $[0, 1]$, então ela converge fracamente.

Fato 76. *Uma sequência de fdas (F_n) converge fracamente se e só se converge pontualmente em um conjunto denso D de $[0, 1]$.*

Prova. Se $F_n \xrightarrow{w} F$, então converge pontualmente em $C(F)$, que é denso em $[0, 1]$. Suponha então que F_n converge pontualmente em um conjunto denso $D \subset [0, 1]$ para $F_D : D \rightarrow [0, 1]$. Obviamente D contém 0, pois $F_n(0) = 0$ para todo $n > 0$. Suponha que F_D é contínua à esquerda em $D \setminus \{0\}$ (senão aplique o Fato 71). Seja então $F : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ a função definida a partir de F_D da seguinte forma: $\forall a \in (0, 1]$

$$F(a) = \lim_{\substack{x \rightarrow a^- \\ x \in D}} F_D(x).$$

Observe que $F_D(x) = F(x)$ para todo $x \in D$ e que F é uma fda, pois F_D é contínua à esquerda. Assim, por (A.1), temos que, para todo $a \in (0, 1)$,

$$\lim_{\substack{x_1 \rightarrow a^- \\ x_1 \in [0,1]}} F(x_1) = \lim_{\substack{x' \rightarrow a^- \\ x' \in D}} F_D(x') \quad \text{e} \quad \lim_{\substack{x_2 \rightarrow a^+ \\ x_2 \in [0,1]}} F(x_2) = \lim_{\substack{x'' \rightarrow a^+ \\ x'' \in D}} F_D(x''). \quad (\text{A.2})$$

Tome então $x' < x'' \in D$ e $a \in (0, 1)$ tal que $x' < a < x''$. Como $F_n(x') \leq F_n(a) \leq F_n(x'')$, temos

$$F_D(x') \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} F_n(a) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} F_n(a) \leq F_D(x''). \quad (\text{A.3})$$

Se $a \in (0, 1)$ é um ponto de continuidade de F , então

$$\lim_{\substack{x_2 \rightarrow a^+ \\ x_2 \in [0,1]}} F(x_2) = \lim_{\substack{x_1 \rightarrow a^- \\ x_1 \in [0,1]}} F(x_1) = F(a).$$

Ou seja, de (A.2)

$$\lim_{\substack{x'' \rightarrow a^+ \\ x'' \in D}} F_D(x'') = \lim_{\substack{x' \rightarrow a^- \\ x' \in D}} F_D(x') = F(a).$$

Fazendo em (A.3) $x' \rightarrow a^-$ e $x'' \rightarrow a^+$ em D , temos que $\liminf_{n \rightarrow \infty} F_n(a) = \limsup_{n \rightarrow \infty} F_n(a)$, que será igual a $F(a)$ pela equação acima. Com isso, $F(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(a)$. \square

Uma das principais aplicações desta seção é o cálculo da integral de Lebesgue-Stieltjes sobre fdas. A σ -álgebra de Borel de um espaço métrico Ω , $Borel(\Omega)$, é a menor σ -álgebra que contém os abertos de Ω .

Sabe-se [44] que toda função de distribuição acumulada tem associada uma medida de Lebesgue-Stieltjes bem definida sobre os borelianos do espaço.

Dada uma fda $F_1 : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ a medida de Lebesgue-Stieltjes μ_1 sobre $Borel([0, 1])$ associada a F_1 é determinada da seguinte forma: $\mu_1[0, 1] = 1$ e $\mu_1[a, b] = F_1(b) - F_1(a)$ (para $a < b \in [0, 1]$). Note que $\mu_1\{1\} = \mu_1[0, 1] - \mu_1[0, 1) = 1 - F_1(1)$. Como $\mu_1[0, 1] = 1$, então μ_1 é também uma medida de probabilidade.

Um comentário sobre esta medida é que, dada a fda F_1 no intervalo $[0, 1]$, podemos facilmente obter uma função F'_1 na reta real, como usualmente visto na literatura, da seguinte forma: $F'_1(x) = F_1(x)$ (para todo $x \in [0, 1]$), $F'_1(x) = 0$ (para todo $x < 0$) e $F'_1(x) = 1$ (para todo $x > 1$). A medida μ'_1 de Lebesgue-Stieltjes sobre $Borel(\mathbb{R})$ obtida de F'_1 é idêntica a μ_1 nos conjuntos de $Borel([0, 1])$.

Uma notação comum para a integral de Lebesgue-Stieltjes de uma função Borel-mensurável $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ sobre μ_1 é a seguinte

$$\int_{[0,1]} g dF_1 = \int_{[0,1]} g d\mu_1. \quad (\text{A.4})$$

Dadas $k > 1$ fdas F_1, \dots, F_k , sejam μ_1, \dots, μ_k as medidas de probabilidade associadas. A medida-produto $\mu = \mu_1 \times \dots \times \mu_k$ é também uma medida de probabilidade em $[0, 1]^k$ sobre $Borel([0, 1]^k)$ [44] e uma notação comum para a integral de uma função Borel-mensurável $g : [0, 1]^k \rightarrow \mathbb{R}$ sobre μ é a seguinte

$$\int_{[0,1]^k} g dF_1 \cdots dF_k = \int_{[0,1]^k} g d\mu. \quad (\text{A.5})$$

Os teoremas de Helly-Bray abaixo (Capítulo IV de [44]) relacionam a convergência fraca de fdas e a convergência das integrais de Lebesgue-Stieltjes de uma função contínua e limitada.

Lema 77 (Teorema de Helly-Bray). *Seja $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e limitada. Se $F_n \xrightarrow{w} F$, então*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[0,1]} g dF_n = \int_{[0,1]} g dF$$

Lema 78 (Teorema de Helly-Bray multivariável). *Fixe um inteiro $k > 1$. Seja $g : [0, 1]^k \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e limitada. Para todo $i \in [k]$, seja F_i uma fda e $(F_{i,n})$ uma seqüência de fdas tais que $F_{i,n} \xrightarrow{w} F_i$. Então*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[0,1]^k} g dF_{1,n} \cdots dF_{k,n} = \int_{[0,1]^k} g dF_1 \cdots dF_k$$

Enunciaremos agora o teorema de Alexandrov [44], às vezes chamado *portmanteau* [8], [49], que mostra a relação entre convergência fraca de medidas e a convergência da medida de um subconjunto. Segundo [51], Billingsley [9] foi provavelmente o primeiro a denominar este teorema pelo termo *portmanteau*, que significa “mala com dois compartimentos”. Com isso, quer dizer que o teorema coloca afirmações diferentes em um mesmo pacote (pois mostra a equivalência).

Dizemos que um espaço métrico Ω é separável se possui um subconjunto denso enumerável. A fronteira ∂A de um subconjunto A de Ω são os pontos tais que toda bola aberta centrada nele contém pontos de A e pontos do complemento de A .

Teorema 79 (Teorema de Alexandrov (ou *portmanteau*) [9]). *Dado um espaço métrico separável Ω e uma seqüência de medidas de probabilidade μ, μ_1, μ_2, \dots sobre os conjuntos de Borel de Ω , temos que as condições abaixo são equivalentes:*

(a) *Para todas as funções contínuas e limitadas $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} g d\mu_n = \int_{\Omega} g d\mu$$

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(A) = \mu(A)$, para todo $A \subset \Omega$ tal que $\mu(\partial A) = 0$.

(c) $\limsup_{n \rightarrow \infty} \mu_n(C) \leq \mu(C)$, para todo $C \subset \Omega$ fechado.

(d) $\liminf_{n \rightarrow \infty} \mu_n(U) \geq \mu(U)$, para todo $U \subset \Omega$ aberto.

Dizemos que μ_n converge fracamente para μ ($\mu_n \xrightarrow{w} \mu$) se uma dessas condições é satisfeita.

Nessa tese, teremos $k > 1$ seqüências $(F_{i,n})$ ($i \in [k]$) de fdas que convergem fracamente $F_{i,n} \xrightarrow{w} F_i$. Seja μ_n o produto das k medidas de Lebesgue-Stieltjes das fdas $F_{i,n}$, $i \in [k]$. Seja μ o produto das k medidas de Lebesgue-Stieltjes das fdas F_i , $i \in [k]$. O Teorema de Helly-Bray multivariável obtém o item (a) do Teorema 79 acima, onde $\Omega = [0, 1]^k$. Com isso, segue o item (b) para $A = [0, 1]_o^k$. Isso será usado no Lema 44 da Seção 4.3, onde se prova que $\mu(\partial[0, 1]_o^k) = 0$.

Um resultado usado juntamente com o Teorema de Alexandrov para provar a mensurabilidade de certas funções é o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue. A versão abaixo é devida a Billingsley [8], onde λ é a medida de Lebesgue.

Teorema 80 (Convergência Dominada de Lebesgue). *Fixe $k > 0$. Seja $g : [0, 1]^k \rightarrow \mathbb{R}$ uma função Lebesgue-mensurável tal que $\int_{[0,1]^k} |g| d\lambda < \infty$. Seja (f_n) uma seqüência de funções Lebesgue-mensuráveis $f_n : [0, 1]^k \rightarrow \mathbb{R}$ tal que, para quase todo $x \in [0, 1]^k$, $|f_n(x)| \leq g(x)$ e*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x).$$

Então $f : [0, 1]^k \rightarrow \mathbb{R}$ é Lebesgue-mensurável e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[0,1]^k} f_n d\lambda = \int_{[0,1]^k} f d\lambda$$

Mostraremos agora um resultado sobre conjuntos separáveis e um corolário que diz que subconjuntos de espaços métricos separáveis são também separáveis [42].

Definição 81. *Uma coleção \mathcal{B} de abertos num espaço métrico M chama-se uma base quando todo aberto $A \subset M$ se exprime como uma união de conjuntos de \mathcal{B} . Ou seja, dado um aberto $A \subset M$ e $x \in A$, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subset A$. Escrevemos $B(x; r)$ para a bola aberta com centro em $x \in M$ e raio $r > 0$, ou seja, $B(x; r) = \{y \in M : d(x, y) < r\}$.*

Fato 82 (Separável \Leftrightarrow Tem base enumerável). *Um espaço métrico M é separável se e só se possui uma base enumerável de abertos [42].*

Prova. Se M é separável, então existe um conjunto E enumerável denso em M . Seja \mathcal{B} a coleção dos abertos com centro em pontos de E e raio racional. Logo \mathcal{B} é enumerável. Falta mostrar que \mathcal{B} é uma base. Fixe $A \subset M$ aberto e $x \in A$. Existem $y \in E$ e $r > 0$ racional tais que $B(x; 2r) \subset A$ e $d(x, y) < r$.

Por definição, $B(y; r) \in \mathcal{B}$. Além disso, se $z \in B(y; r)$, então $d(z, x) \leq d(z, y) + d(y, x) < 2r$. Logo, $x \in B(y; r) \subset B(x; 2r) \subset A$.

Suponha agora que M possui uma base enumerável \mathcal{B} de abertos. Seja E um conjunto formado selecionando um ponto de cada aberto em \mathcal{B} . Logo E é enumerável. Falta mostrar que E é denso em M . Fixe $x \in M$ e seja A um aberto qualquer que contém x . Como \mathcal{B} é uma base, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subset A$. Por definição, existe um elemento de E em $B \subset A$. Portanto E é denso. \square

Corolário 83. *Se M é um espaço métrico separável e $X \subset M$, então X é separável.*

Prova. Note que todo aberto em X é da forma $A \cap X$, onde A é um aberto de M . Seja $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, \dots\}$ a base enumerável de M . Portanto $A = \bigcup_k B_{i_k}$ e $A \cap X = \bigcup_k (B_{i_k} \cap X)$. Ou seja, $\mathcal{B}_X = \{B_1 \cap X, B_2 \cap X, \dots\}$ é uma base enumerável de X . Logo X é separável. \square

Referências Bibliográficas

- [1] N. Alon, R. Duke, H. Leffman, V. Rödl, and R. Yuster, *The algorithmic aspects of the regularity lemma*, Journal of Algorithms **16** (1994), 80–109.
- [2] N. Alon, E. Fischer, I. Newman, and A. Shapira, *A combinatorial characterization of the testable graph properties: It's all about regularity*, STOC2006 (2006), 251–260.
- [3] N. Alon and A. Shapira, *A characterization of the (natural) graph properties testable with one-sided error*, SICOMP (Special Issue of FOCS'05) **37** (2008), 1703–1727.
- [4] N. Alon and J. Spencer, *The probabilistic method*, second ed., WILEY, 2000.
- [5] R. Ash, *Real analysis and probability*, Academic Press, 1972.
- [6] K. Azuma, *Weighted sums of certain dependents random variables*, Tokohu Mathematical Journal **19** (1967), 357–367.
- [7] I. Benjamini and O. Schramm, *Recurrence of distributional limits of finite planar graphs*, Eletronic J. Probab. **6** (2001), no. 23, 1–13.
- [8] P. Billingsley, *Probability and measure*, John Wiley and Sons, 1995.
- [9] ———, *Convergence of probability measures*, John Wiley and Sons, 1999.
- [10] B. Bollobás, S. Janson, and O. Riordan, *The phase transition in inhomogeneous random graphs*, Random Structures and Algorithms **31** (2007), 3–122.
- [11] B. Bollobás and O. Riordan, *Mathematical results on scale-free random graphs*, Handbook of graphs and networks, Wiley (2003), 1–34.
- [12] B. Bollobás and A. Thomason, *Threshold functions*, Combinatorica **7** (1987), 35–38.
- [13] C. Borgs, J. T. Chayes, L. Lovász, V. T. Sós, B. Szegedy, and K. Vesztergombi, *Convergent sequences of dense graphs i: Subgraph frequencies, metric properties and testing*, Preprint (2006).

- [14] ———, *Convergent sequences of dense graphs ii: Multiway cuts and statistical physics*, Preprint (2007).
- [15] C. Borgs, J. T. Chayes, L. Lovász, V. T. Sós, and K. Vesztegombi, *unpublished*, (2003).
- [16] P. J. Cameron and T. Wu, *The complexity of the weight problem for permutation groups*, *Electronic Notes in Discrete Mathematics* **28** (2007), 109–116.
- [17] F. Chung and R. Graham, *Quasi-random classes of hypergraphs*, *Random Structures and Algorithms* **1** (1990), 105–124.
- [18] ———, *Quasi-random set systems*, *Journal Am. Math. Soc.* **4** (1991), 151–196.
- [19] ———, *Quasi-random subsets of \mathbb{Z}_n* , *Journal of Combinatorial Theory A* **61** (1992), 64–86.
- [20] F. Chung, R. Graham, and R. Wilson, *Quasi-random graphs*, *Combinatorica* **9** (1989), 345–362.
- [21] J. Cooper, *Quasirandom permutations*, *Journal of Combinatorial Theory Series A* **106** (2004), 123–143.
- [22] ———, *A permutation regularity lemma*, *The Electronic Journal of Combinatorics* **13** (2006).
- [23] Herbert A. David and H. N. Nagaraja, *Order statistics*, 3 ed., Wiley Interscience, 2003.
- [24] M. Deza and T. Huang, *Metrics on permutations, a survey*, *J. Comb. Inf. Sys. Sci.* **23** (1998), 173–185.
- [25] P. Diaconis, *Group representations in probability and statistics, lecture notes - monograph series*, vol. 11, Institute of Mathematical Statistics, Harvard University, 1988.
- [26] R. Diestel, *Graph theory*, Springer-Verlag, 2000.
- [27] J. L. Doob, *Stochastic processes*, Wiley Pub. Stat., 1953.
- [28] P. Erdős, *Some remarks on the theory of graphs*, *Bull. Amer. Math. Soc.* **53** (1947), 292–294.
- [29] ———, *Graph theory and probability*, *Canad. J. Math.* **11** (1959), 34–38.
- [30] ———, *Graph theory and probability ii*, *Canad. J. Math.* **13** (1961), 346–35.
- [31] P. Erdős and A. Rényi, *On the evolution of random graphs*, *Publ. Math. Inst. Hungar. Acad. Sci.* **5** (1960), 17–61.
- [32] P. Frankl and V. Rödl, *Extremal problems on set systems*, *Random Structures and Algorithms* **20** (2002), no. 2, 131–164.

- [33] E. Friedgut, *Sharp thresholds of graph properties, and the k -sat problem*, Journal of the American Math. Soc. **12** (1999), no. 4, 1017–1054.
- [34] A. Frieze and R. Kannan, *Quick approximation to matrices and applications*, Combinatorica **19** (1999), 175–220.
- [35] O. Goldreich, S. Goldwasser, and D. Ron, *Property testing and its connection to learning and approximation*, Journal ACM **45** (1998), no. 4, 653–750.
- [36] G. Grimmett and D. Stirzaker, *Probability and random processes*, third ed., Oxford University Press, 2001.
- [37] W. Hoeffding, *Probability for sums of bounded random variables*, Journal of the American Statistical Association **58** (1963), 13–30.
- [38] Y. Kohayakawa, *The regularity lemma of szemerédi for sparse graphs*, manuscript (1993).
- [39] Y. Kohayakawa and V. Rödl, *Szemerédi’s regularity lemma for sparse graphs*, Foundations of computational mathematics (Berlin, Springer) **16** (1997), 216–230.
- [40] Y. Kohayakawa, V. Rödl, and J. Skokan, *Hypergraphs, quasi-randomness, and conditions for regularity*, Journal Combin. Theory. Ser.A **97** (2002), 307–352.
- [41] E. L. Lima, *Elementos de topologia geral*, Ao Livro Técnico S.A., 1970.
- [42] ———, *Espaços métricos*, Projeto Euclides, IMPA, 1977.
- [43] ———, *Curso de análise volume 1*, 12 ed., IMPA, Projeto Euclides, 2008.
- [44] M. Loève, *Probability theory i*, fourth ed., Springer-Verlag, 1977.
- [45] L. Lovász and V. T. Sós, *Generalized quasirandom graphs*, Journal of Combinatorial Theory Series B **98** (2008), no. 1, 146–163.
- [46] L. Lovász and B. Szegedy, *Limits of dense graph sequences*, J. Comb. Theory B **96** (2006), 933–957.
- [47] ———, *Graph limits and testing hereditary graph properties*, preprint, Microsoft Research Technical Report MSR-TR-2005-110 (2007).
- [48] C. G. T. Moreira, *Comunicação pessoal*, IMPA (2008).
- [49] J. C. Oxtoby, *Measure and category*, 2 ed., Springer-Verlag, New York, 1994.
- [50] V. Rödl and J. Skokan, *Regularity lemma for uniform hypergraphs*, Random Structures and Algorithms **25** (2004), 1–42.

- [51] S. Resnick, *A probability path*, 3 ed., Birkhauser, Boston, 2003.
- [52] W. Rudin, *Princípios de análise matemática*, 2 ed., Ao Livro Técnico S.A., Editora Universidade de Brasília, 1971.
- [53] ———, *Real and complex analysis*, 3 ed., McGraw-Hill, 1987.
- [54] W. M. Schmidt, *Irregularities of distributios vii*, Acta Arith. **21** (1972), 45–50.
- [55] E. Szemerédi, *On sets of integers containing no k elements in arithmetic progressions*, Acta Arith. **27** (1975), 299–345.
- [56] ———, *Regular partitions of graphs*, Proceedings, Colloque Inter. CNRS (J. C. Fournier, M. Las Vergnas, and D. Sotteau, Eds.) (1978), 399–401.
- [57] B. L. van der Waerden, *Beweis einer baudetschen vermutung*, Nieuw Archief voor Wiskunde **15** (1927), 212–216.

Índice Remissivo

conjunto

- ε -balanceado, 8
- quase-aleatório, 6

desigualdade

- Azuma, 65
- Chebyshev, 83
- Chernoff, 85
- Markov, 83

fda, 86

- convergência fraca, 48, 88
- descontinuidades, 49, 88

grafo

- W -aleatório, 3
- aleatório, 1, 2
- quase-aleatório, 4

lema da regularidade

- grafos, 14
- permutações, 17–20

martingais, 46

- convergência, 53, 59
- de exposição, 65

notação assintótica, 8, 10

objeto limite, 3

- graphons*, 28
- permutação limite, 49

permutação

- Z -aleatória, 64
- densidade de subpermutações, 41
- discrepância de, 9
- distância entre, 37
- quase-aleatória, 9

subconjunto

- denso, 48, 89
- separável, 48, 92

Teorema

- Alexandrov, 57, 91
- convergência dominada de Lebesgue, 49, 50, 54, 59, 62, 92
- Helly-Bray, 57, 63, 91
- König, 53
- testabilidade, 3