Tempo de Iteração e Número de Posição Geral em Convexidade de Grafos

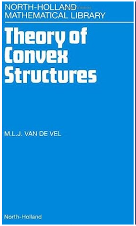
Júlio Araújo, Mitre Dourado, Fábio Protti, **Rudini Sampaio**

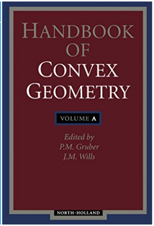
MAT-UFC, IC-UFRJ, IC-UFF, DC-UFC

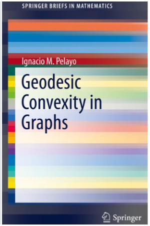
SBPO-2023, São José dos Campos, SP
Segunda, 06-Novembro, 15h20

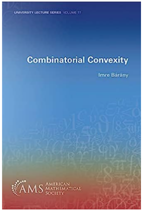


Convexidade em Grafos



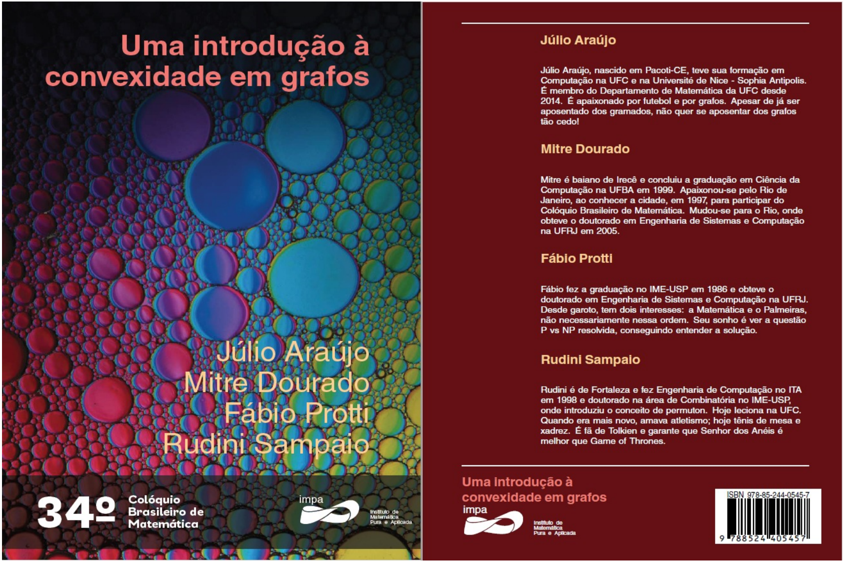






- Convexidade é um tema clássico da Matemática.
- Teoremas de Carathéodory (1911), Radon (1921), Helly (1923) e Erdős-Szekeres (1935): bases da área de Convexidade Combinatória.
- Levi (1951): Convexidade abstrata: desigualdade de Levi ($rd \geq h\ell$)
- Erdős et al. (1972): Convexidade em torneios.
- Harary-Nieminem'1981 *(Convexity in Graphs)*: 1^o artigo em grafos gerais, onde foi introduzido o parâmetro Tempo de Iteração.
- 2000-2010-2020: Pesquisa sobre a complexidade computacional de parâmetros de convexidade em grafos.
- Jayme Szwarcfiter: Grande pesquisador/propagador da área. Há 17 referências de artigos dele (citadas 30 vezes) em livro do IMPA, 2023.

Convexidade em Grafos



Os 10 Parâmetros de Convexidade de Grafos

1. $\text{hn}(G)$: **número de Envoltória** tam menor conjunto de envoltória S de G na convexidade $\mathcal{C}$: $\text{conv}_{\mathcal{C}}(S) = V$.
2. $\text{in}(G)$: **número de Intervalo:** tam menor conjunto de intervalo S de G na convexidade $\mathcal{C}$: $\text{I}_{\mathcal{C}}(S) = V$.
3. $\text{con}(G)$: **núm Convexidade:** tam maior conjunto convexo $S \subsetneq V$
4. $\text{cth}(G)$: **número de Carathéodory**
5. $\text{rd}(G)$: **número de Radon**
6. $\text{h}\ell(G)$: **número de Helly**
7. $\text{rk}(G)$: **Posto (rank)**
8. $\text{gp}(G)$: **número de Posição Geral**
9. $\text{ti}(G)$: **Tempo de Iteração:** max $\text{ti}_{\mathcal{C}}(S)$ entre conjuntos $S \subseteq V$.
10. $\text{tp}(G)$: **Tempo de Percolação:** max $\text{ti}_{\mathcal{C}}(S)$ entre conjuntos $S \subseteq V$, que são conjuntos de envoltória. $\text{ti}(G) \leq \text{tp}(G)$

$$\text{gp}(G) \;\geq\; \text{rk}(G) \;\geq\; \text{rd}(G) \;\geq \text{h}\ell(G) \;\geq\; \frac{\text{rd}(G)}{\text{cth}(G)}$$

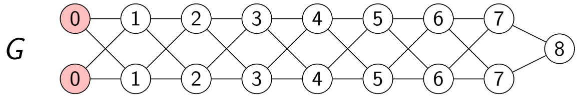
Tempo de Iteração

Convexidade Geodésica

- Seja G um grafo e $S \subseteq V(G)$. O *intervalo geodésico* $\mathrm{I_g}(S)$ é o conjunto S e todo vértice em caminho mínimo entre 2 vértices de S.
- S é *convexo geodesicamente* se $\mathrm{I_g}(S) = S$. O *fecho convexo geodésico* $\mathrm{conv_g}(S)$ é o menor conjunto convexo contendo S.
- Obtém-se $\mathrm{conv_g}(S)$ de $\mathrm{I_g}(\cdot)$ aplicada sucessivamente a partir de S. Seja $\mathrm{I}_\mathrm{g}^k(\cdot)$ a função obtida de k aplicações de $\mathrm{I_g}(\cdot)$.
- O *tempo de iteração* $\mathrm{ti_g}(S)$ é o menor k tal que $\mathrm{I}_\mathrm{g}^k(\cdot) = \mathrm{conv_g}(S)$.
- O *tempo de iteração* $\mathrm{ti_g}(G)$ é o máximo $\mathrm{ti_g}(S)$ para $S \subseteq V(G)$.

Convexidades Monofônica e P_3/P_3^*

- **Monofônica:** caminhos induzidos
- P_3**:** caminhos com 3 vértices. P_3^***:** caminhos induzidos com 3 vértices



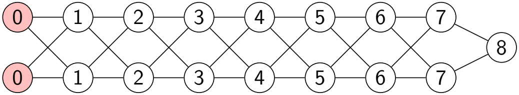
Tempo de Iteração

Um dos primeiros parâmetros de convexidade **[Harary, Nieminem, 1981]**. Em 2016 e 2020, algoritmos polinomais foram obtidos para grafos distância hereditária. Porém, a questão da complexidade computacional permanecia em aberto.

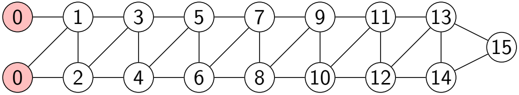
Convexidades Geodésica, Monofônica e P_3/P_3^*

- **Geodésica:** caminhos mínimos. $\mathrm{ti}_{\mathrm{g}}(G), \mathrm{ti}_{\mathrm{g}}(S), \mathrm{I}_{\mathrm{g}}(S), \mathrm{conv}_{\mathrm{g}}(S)$
- **Monofônica:** caminhos induzidos. $\mathrm{ti}_{\mathrm{m}}(G)$
- P_3**:** caminhos com 3 vértices. $\mathrm{ti}_{\mathrm{p3}}(G)$
- P_3^***:** caminhos induzidos com 3 vértices. $\mathrm{ti}_{\mathrm{p3}*}(G)$

G



H

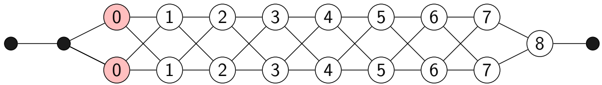


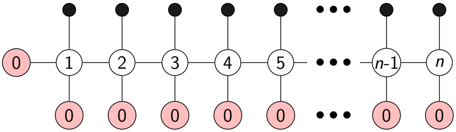
Tempo de Iteração

Um dos primeiros parâmetros de convexidade **[Harary, Nieminem, 1981]**. Em 2016 e 2020, algoritmos polinomais foram obtidos para grafos distância hereditária. Porém, a questão da complexidade computacional permanecia em aberto.

Convexidades Geodésica, Monofônica e P_3/P_3^*

- **Geodésica:** caminhos mínimos. $\mathrm{ti_g}(G)$
- **Monofônica:** caminhos induzidos. $\mathrm{ti_m}(G)$
- P_3**:** caminhos com 3 vértices. $\mathrm{ti_{p3}}(G)$
- P_3^***:** caminhos induzidos com 3 vértices. $\mathrm{ti_{p3\,*}}(G)$





Tempo de Iteração

Um dos primeiros parâmetros de convexidade **[Harary, Nieminem, 1981]**. Em 2016 e 2020, algoritmos polinomais foram obtidos para grafos distância hereditária. Porém, a questão da complexidade computacional permanecia em aberto.

Convexidades Geodésica, Monofônica e P_3/P_3^*

- **Geodésica:** caminhos mínimos. $\mathrm{ti_g}(G)$
- **Monofônica:** caminhos induzidos. $\mathrm{ti_m}(G)$
- P_3**:** caminhos com 3 vértices. $\mathrm{ti_{p3}}(G)$
- P_3^***:** caminhos induzidos com 3 vértices. $\mathrm{ti_{p3\,*}}(G)$

Nossos resultados no Tempo de Iteração

- Fomos os primeiros a definir o Tempo de Iteração em outras convexidades, além da geodésica.
- Provamos que o Tempo de Iteração P_3 é NP-Difícil em bipartidos
- Usamos esse resultado para provar um problema que estava em aberto desde 1981: o Tempo de Iteração geodésico é NP-Difícil.
- Dois últimos resultados de complexidade computacional entre os 10 principais parâmetros nas convexidades geodésica e P_3.

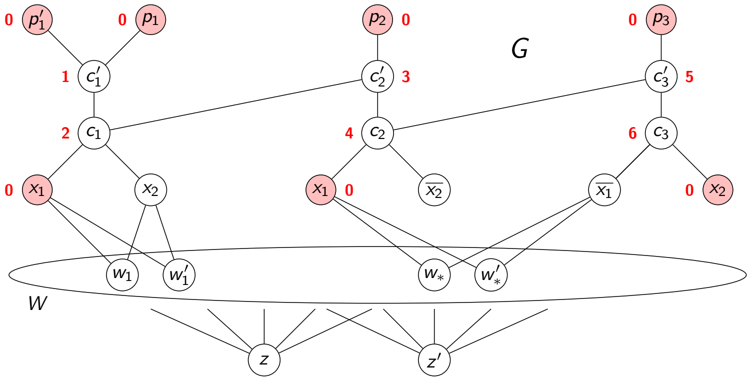
Os 10 Parâmetros de Convexidade de Grafos

1. $\mathrm{hn}(G)$: **número de Envoltória** tam menor conjunto de envoltória S de G na convexidade $\mathcal{C}$: $\mathrm{conv}_{\mathcal{C}}(S) = V$.
2. $\mathrm{in}(G)$: **número de Intervalo:** tam menor conjunto de intervalo S de G na convexidade $\mathcal{C}$: $\mathrm{I}_{\mathcal{C}}(S) = V$.
3. $\mathrm{con}(G)$: **núm Convexidade:** tam maior conjunto convexo $S \subsetneq V$
4. $\mathrm{cth}(G)$: **número de Carathéodory**
5. $\mathrm{rd}(G)$: **número de Radon**
6. $\mathrm{h\ell}(G)$: **número de Helly**
7. $\mathrm{rk}(G)$: **Posto (rank)**
8. $\mathrm{gp}(G)$: **número de Posição Geral**
9. $\mathrm{ti}(G)$: **Tempo de Iteração:** max $\mathrm{ti}_{\mathcal{C}}(S)$ entre conjuntos $S \subseteq V$.
10. $\mathrm{tp}(G)$: **Tempo de Percolação:** max $\mathrm{ti}_{\mathcal{C}}(S)$ entre conjuntos $S \subseteq V$, que são conjuntos de envoltória. $\mathrm{ti}(G) \leq \mathrm{tp}(G)$

$$\mathrm{gp}(G) \geq \mathrm{rk}(G) \geq \mathrm{rd}(G) \geq \mathrm{h\ell}(G) \geq \frac{\mathrm{rd}(G)}{\mathrm{cth}(G)}$$

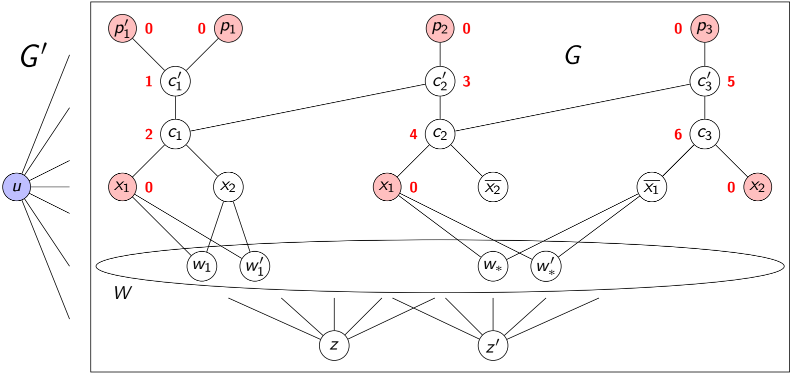
Tempo de iteração P_3 é NP-Difícil em bipartidos

- Redução do Problema 3SAT para $m \geq 10$ cláusulas
- Exemplo para a fórmula $\Phi = (x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \overline{x_2}) \wedge (\overline{x_1} \vee x_2)$
- Grafo G obtido de Φ é bipartido
- Formula SAT $\Leftrightarrow$ Tempo de iteração $\mathrm{ti}_{\mathrm{p3}}(G) = 2m$



Tempo de iteração geodésico é NP-Difícil

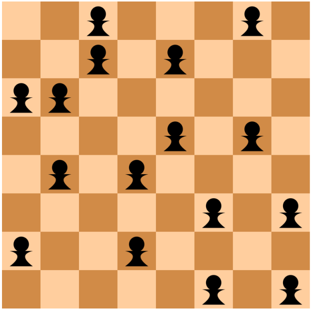
- Redução do Problema do Tempo de Iteração P_3 em bipartidos.
- Grafo G' obtido de G tem diam 2: crie em G' um vértice universal u
- Como G é livre de triângulos, todo caminho mínimo em G' entre vértices de G não vizinhos é um P_3 (induzido).



- *Open problem:* complexidade do tempo de iteração monofônico.

Número de Posição Geral - No-Three-In-Line

- *No-Three-In-Line Problem (Puzzle with Pawns)* de H. Dudeney de 1917: *Dado n, encontrar o máximo de pontos* **em posição geral** *com coordenadas inteiras entre 1 e n (não há 3 numa mesma reta)?*
- [Flammenkamp, 1998]: $2n$ pontos p/ $n \leq 46$. Em aberto p/ $n > 46$.



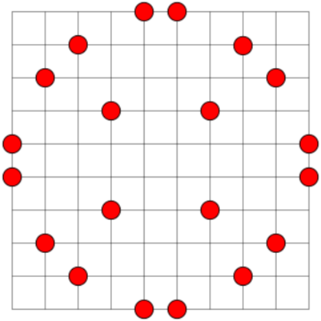
Conjunto máximo em Posição Geral geométrica no tabuleiro 8x8

16 peões:
2 por linha e
2 por coluna

- *Problema em Grafos:* dado G, obter o maior conjunto de vértices **em posição geral geodésica**: sem 3 num caminho mínimo em G.

Número de Posição Geral - No-Three-In-Line

- *No-Three-In-Line Problem (Puzzle with Pawns)* de H. Dudeney de 1917: *Dado n, encontrar o máximo de pontos* **em posição geral** *com coordenadas inteiras entre 1 e n (não há 3 numa mesma reta)?*
- [Flammenkamp, 1998]: $2n$ pontos p/ $n \leq 46$. Em aberto p/ $n > 46$.



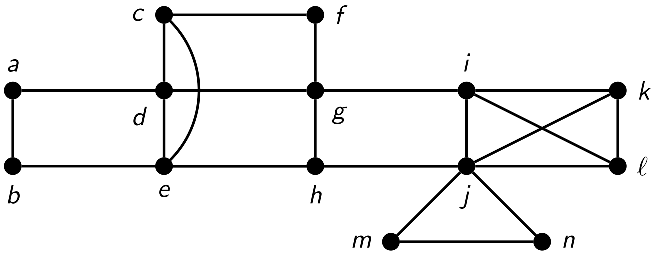
Conjunto Máximo em Posição Geral geométrica

20 pontos: 2 por linha e 2 por coluna

- *Problema em Grafos:* dado G, obter o maior conjunto de vértices **em posição geral geodésica**: sem 3 num caminho mínimo em G.

Número de Posição Geral

- $S \subseteq V(G)$ está em **posição geral** em uma convexidade $\mathcal{C}$ se não existem $x, y, z \in S$ distintos tais que $z \in \mathrm{I}_{\mathcal{C}}(\{x, y\})$, onde $\mathcal{C}$ pode ser qualquer convexidade, como a geodésica, monofônica ou P_3.
- O **Número de Posição Geral** $\mathrm{gp}_{\mathcal{C}}(G)$ é o tamanho do maior conjunto em posição geral na convexidade $\mathcal{C}$.



- $\mathrm{gp_g}(G_1) = 7.$ Conj $\{a, b, c, k, \ell, m, n\}$ em posição geral geodésica.
- $\mathrm{gp_m}(G_1) = 5.$ Conj $\{a, \quad k, \ell, m, n\}$ em posição geral monofônica.

Número de Posição Geral monofônica

- Na convexidade P_3, um conjunto em posição geral induz um subgrafo com grau máximo 1: $\mathrm{gp}_{\mathrm{p3}}(G) = \mathrm{diss}(G)$ [Yannakakis, 1981]
- Na convexidade P_3^*, um conjunto em posição geral induz um subgrafo cujas componentes conexas são cliques: $\mathrm{gp}_{\mathrm{p3}}(G) = \mathrm{iuc}(G)$ [Ertem et al., 2020]. Independent union of cliques.
- Na convexidade geodésica, Manuel e Klavžar 2018 provaram que $\mathrm{gp}_{\mathrm{g}}(G)$ é NP-Difícil.

Teorema: $\mathrm{gp}_{\mathrm{m}}(G)$ é NP-Difícil

- Dado G qualquer, construímos G' tal que $\mathrm{gp}_{\mathrm{m}}(G') = \omega(G) + 1$
- Clique máxima é NP-difícil $\Rightarrow$ $\mathrm{gp}_{\mathrm{m}}(G)$ é NP-difícil
- Clique máxima é $n^{1-\varepsilon}$-inaprox $\Rightarrow$ $\mathrm{gp}_{\mathrm{m}}(G)$ é $n^{1-\varepsilon}$-inaprox $\forall \varepsilon > 0$
- $\omega(G) \geq k$ é W[1]-difícil em k $\Rightarrow$ $\mathrm{gp}_{\mathrm{m}}(G) \geq k$ é W[1]-difícil em k

Número de Posição Geral P_3

Na convexidade P_3, um conjunto em posição geral induz um subgrafo com grau máximo 1: $\mathrm{gp}_{\mathrm{p3}}(G) = \mathrm{diss}(G)$ [Yannakakis, 1981]

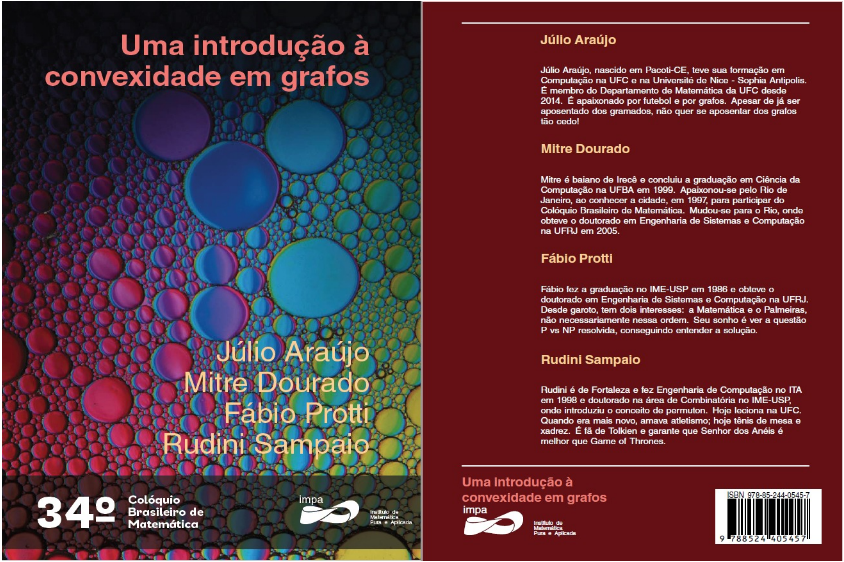
Teorema: Decidir se $\mathrm{gp}_{\mathrm{p3}}(G) \geq k$ é XP, mas W[1]-difícil em k.

- Redução do Problema *Multicolored Independent Set*.

Teorema: Decidir se $\mathrm{gp}_{\mathrm{p3}}(G) \geq k$ possui kernel em $\mathrm{nd}(G) + k$ de tam $\mathcal{O}(\mathrm{nd}(G) \cdot k)$ e kernel em $\mathrm{vc}(G) + k$ de tam $\mathcal{O}(\mathrm{vc}(G) + k)$, onde $\mathrm{nd}(G)$ é a *neighborhood diversity* e $\mathrm{vc}(G)$ é o tam de uma cobertura mínima de G.

Teorema: Decidir se $\mathrm{gp}_{\mathrm{p3}}(G) \geq k$ é FPT na *cliquewidth* do grafo. Ademais, $\mathrm{gp}_{\mathrm{p3}}(G)$ é computável em tempo linear para grafos distância hereditária.

DÚVIDAS ???


Uma introdução à convexidade em grafos
Júlio Araújo
Mitre Dourado
Fábio Protti
Rudini Sampaio
34º Colóquio Brasileiro de Matemática
impa
Instituto de Matemática Pura e Aplicada
Júlio Araújo
Júlio Araújo, nascido em Pacoti-CE, teve sua formação em Computação na UFC e na Université de Nice - Sophia Antipolis. É membro do Departamento de Matemática da UFC desde 2014. É apaixonado por futebol e por grafos. Apesar de já ser aposentado dos gramados, não quer se aposentar dos grafos tão cedo!
Mitre Dourado
Mitre é baiano de Irecê e concluiu a graduação em Ciência da Computação na UFBA em 1999. Apaixonou-se pelo Rio de Janeiro, ao conhecer a cidade, em 1997, para participar do Colóquio Brasileiro de Matemática. Mudou-se para o Rio, onde obteve o doutorado em Engenharia de Sistemas e Computação na UFRJ em 2005.
Fábio Protti
Fábio fez a graduação no IME-USP em 1986 e obteve o doutorado em Engenharia de Sistemas e Computação na UFRJ. Desde garoto, tem dois interesses: a Matemática e o Palmeiras, não necessariamente nessa ordem. Seu sonho é ver a questão P vs NP resolvida, conseguindo entender a solução.
Rudini Sampaio
Rudini é de Fortaleza e fez Engenharia de Computação no ITA em 1998 e doutorado na área de Combinatória no IME-USP, onde introduziu o conceito de permuton. Hoje leciona na UFC. Quando era mais novo, amava atletismo; hoje tênis de mesa e xadrez. É fã de Tolkien e garante que Senhor dos Anéis é melhor que Game of Thrones.
Uma introdução à convexidade em grafos
impa
Instituto de Matemática Pura e Aplicada
ISBN 978-85-244-0545-7
9 788524 405457