Complexidade Parametrizada e Aplicações de Lógica em Algoritmos

Rudini Sampaio
Universidade Federal do Ceará (UFC)
Fortaleza, Brazil

Novembro, 07, 2014

Lógica 1o ordem

Lógica 2o ordem

Lógica 2o ordem

FPT, Courcelle e Frick-Grohe

Aplicações em Otimização

Algoritmos versus Lógica

Pesquisa em Algoritmos

- Estuda um problema computacional
- Tenta encontrar um algoritmo “eficiente”
  (polinomial ou exponencial) (exato ou aproximativo)
- Tenta provar complexidade
  (NP-completude, inaproximabilidade, APX-hardness, ...)
- Tenta achar uma formulação de programação matemática
  (para aplicar Programação Linear, Inteira,...)

Pesquisa em Lógica

- Estuda lógicas (1o ou 2o ordem, 1o ordem com ponto fixo, Monádica 2o ordem)
- Tenta ver quais classes de complexidade são “descritas” por uma lógica
- Tenta definir novas lógicas com o objetivo de “descrever” classes de complexidade.

Algoritmos com Lógica

Pesquisa em Algoritmos e Lógica

- Estudar um problema computacional
- Tentar encontrar um algoritmo polinomial usando lógica
- Tentar provar complexidade usando lógica

Classes de Complexidade para Problemas de Decisão

- **Classe P**: tem algoritmo de tempo polinomial.
- **Classe NP**: tem algoritmo não-determ. de tempo polinomial.
- **Classe NP**: possuem verificador de tempo polinomial.
- **Questão NP=P**: Será que todo problema razoável é fácil?
- **Classe PSPACE**: possuem algoritmo de espaço polinomial.
- **Hierarquia**: $P \subseteq NP \subseteq PSPACE$.
- **NP-Completude**: todos em NP se reduzem polin. a ele.
- **PSPACE-Completo**: todos PSPACE se reduzem polin. a ele.

Lógica Proposicional

- Variáveis: $x_1, x_2, \ldots, x_n$
- Literais: $x_1, \overline{x_1}, x_2, \overline{x_2}, \ldots, x_n, \overline{x_n}$
- Operadores: OR ($x_1 \vee x_2$), AND ($x_1 \wedge x_2$), NOT ($\overline{x_1} = \neg x_1$)

Exemplo:

- $\Phi \ = \ (x_1 \vee x_2) \ \wedge \ (x_1 \vee \overline{x_2}) \ \wedge \ (\overline{x_1} \ \vee \ x_2)$
- $\Phi' \ = \ (x_1 \vee x_2) \ \wedge \ (x_1 \vee \overline{x_2}) \ \wedge \ (\overline{x_1} \ \vee \ x_2) \ \wedge \ (\overline{x_1} \vee \overline{x_2})$
- **Problema SAT:** dada uma fórmula lógica proposicional Φ, ela é satisfatível? Ou seja, existe uma atribuição de V ou F às variáveis de modo que Φ seja V?
- **Problema *k*-SAT:** Forma Normal Conjuntiva, cláusulas com k literais.
- **Teo Cook-Levin, 1976:** SAT e k-SAT ($k \geq 3$) são NP-Completos.
- **2-SAT pertence a P**.

Lógica de 1o ordem

- Variáveis: $x_1, x_2, \dots, x_n$
- Literais: $x_1, \overline{x_1}, x_2, \overline{x_2}, \dots, x_n, \overline{x_n}$
- Operadores: OR $(x_1 \vee x_2)$, AND $(x_1 \wedge x_2)$, NOT $(\overline{x_1} = \neg x_1)$
- **Quantificadores:** "*para todo*" $(\forall)$, "*existe*" $(\exists)$

Exemplo:

- $\Phi \;=\; \forall x_1 \exists x_2 \, [(x_1 \vee x_2) \;\wedge\; (\overline{x_1} \vee \overline{x_2})]$
- $\Phi' \;=\; \exists x_1 \forall x_2 \, [(x_1 \vee x_2) \;\wedge\; (\overline{x_1} \vee \overline{x_2})]$
- **Problema ASAT ou TQBF:** dada uma fórmula 1o ordem Φ (totalmente quantificada), ela é verdadeira?
- TQBF é PSPACE-Completo.

Lógica de 1o ordem em Grafos

Problemas de decisão em grafos

- $Clique_k$: grafo G tem k vértices formando uma clique?
- $Indep_k$: grafo G tem k vértices formando conj. independente?
- Dom_k: grafo G tem k vértices que dominam todos vértices?

$$Clique_k \; := \; \exists x_1, \ldots \exists x_k \; \left(\bigwedge_{1 \leq i < j \leq k} x_i \neq x_j \; \wedge \bigwedge_{1 \leq i < j \leq k} Ex_i x_j \right)$$

$$Indep_k \; := \; \exists x_1, \ldots \exists x_k \; \left(\bigwedge_{1 \leq i < j \leq k} x_i \neq x_j \; \wedge \bigwedge_{1 \leq i < j \leq k} \neg Ex_i x_j \right)$$

$$Dom_k := \exists x_1, \ldots \exists x_k \left(\bigwedge_{1 \leq i < j \leq k} x_i \neq x_j \wedge \forall y \bigvee_{1 \leq i \leq k} (Ex_i y \vee (x_i = y)) \right)$$

Lógica de 1o ordem em Grafos

- $CobVert_k$: grafo G tem k vértices que cobrem todas arestas?
- P_3-convex$_k$: grafo G tem k vértices sem P_3-infectar ninguém? (nenhum par possui um vizinho em comum fora do conjunto)
- $Roman_{k,\ell}$: É possível definir k vértices tipo 2 e ℓ vértices tipo 1 tq todo vértice sem tipo é vizinho de um vértice tipo 2?

$$CobVert_k := \exists x_1, \ldots \exists x_k \left(\ldots \forall y, z \, \neg Eyz \vee \bigvee_{1 \leq i \leq k} (x_i = y) \vee (x_i = z) \right)$$

$$P_3conv_k := \exists x_1, \ldots \exists x_k \forall y \left(\bigvee_{1 \leq i < j \leq k} Ex_iy \wedge Ex_jy \right) \rightarrow \left(\bigvee_{1 \leq i \leq k} x_i = y \right)$$

$$Roman_{k,\ell} := \exists x_1, \ldots x_{k+\ell} \Big(\bigwedge_{i<j\leq k} x_i \neq x_j \wedge \forall y \bigvee_{i \in [k]} Ex_iy \vee \bigvee_{i \in [k+\ell]} (x_i = y) \Big)$$

$$Roman_p := \bigvee_{0 \leq k \leq \lfloor p/2 \rfloor} Roman_{k,p-2k}$$

Lógica de 2o ordem

- Lógica 1o Ordem + Quantif. em conj. (ou duplas, triplas,...)
- **Teo Fagin, 1974:** NP $\Leftrightarrow$ Lógica Existencial 2o ordem
- **Exemplo:** $coColor_{k,\ell}$: grafo G pode ser particionado em k conjuntos independentes e ℓ cliques? **coChromatic**$_p$
- **Exemplo:** $\ell idColor_k$: G tem k-coloração própria tq conj de cores na viz fech de qq par de vert. adj. não-twin são distintos

$$coColor_{k,\ell} := \exists X_1, \ldots, X_{k+\ell} \Big(Part(X_1, \ldots, X_{k+\ell}) \wedge \bigwedge_{1 \le i \le k} Indep(X_i) \wedge \bigwedge_{k < j \le k+\ell} Clique(X_j) \Big), \ onde$$

$$Part(X_1, \ldots, X_k) := \forall x, y \Big(\bigvee_{i \in [k+\ell]} X_i x \wedge \bigwedge_{1 \le i < j \le k+\ell} \neg (X_i x \wedge X_j x) \Big)$$

$$Indep(X) := \forall x, y \bigwedge_{1 \le i \le k} ((X_i x \wedge X_i y) \to \neg Exy)$$

$$Clique(X) := \forall x, y \bigwedge_{1 \le i \le k} ((X_i x \wedge X_i y) \to Exy)$$

Lógica de 2o ordem

- Lógica 1o Ordem + Quantif. em conj. (em qq **relações**)
- **Teo Fagin, 1974:** NP $\Leftrightarrow$ Lógica Existencial 2o ordem
- **Exemplo:** $coColor_{k,\ell}$: grafo G pode ser particionado em k conjuntos independentes e ℓ cliques? **coChromatic**$_p$
- **Exemplo:** $\ell idColor_k$: G tem k-coloração própria tq conj de cores na viz fech de qq par de vert. adj. não-twin são distintos

$$coColor_{k,\ell} := \exists X_1, \ldots, X_{k+\ell} \left(Part(X_1, \ldots, X_{k+\ell}) \wedge \right.$$

$$\left. \bigwedge_{1 \le i \le k} Indep(X_i) \ \wedge \bigwedge_{k < j \le k+\ell} Clique(X_j) \right), \ \ldots.$$

$$\ell idColor_k := \exists X_1, \ldots, X_k \left(Part(X_1, \ldots, X_k) \wedge \bigwedge_{1 \le i \le k} Indep(X_i) \wedge \forall x, y \right.$$

$$\left((\forall z, Exz \leftrightarrow Eyz) \vee (\exists z, Exz \wedge \neg \exists w, Eyw \wedge \bigvee_{1 \le i \le k} (X_i z \wedge X_i w)) \vee (\ldots) \right) \Big)$$

Lógica de 2o ordem em grafos

- $Conexo(R)$: subgrafo de G induzido por R é conexo?
- $RecolorConvex_k$: grafo G 2-colorido pode ser recolorido com k alterações de modo que cada cor seja conexa?
- $MaxTime_k$: grafo G pode ser infectado em k passos?

$$Conexo(R) := \forall X\ (\forall x, x \in R \to x \in X) \vee (\forall x, x \notin X \cap R) \vee$$
$$\exists x, y\ (Exy \wedge x, y \in R \wedge x \in X \wedge y \notin X)$$

$$RecolorConvex_k := \exists x_1, \ldots, x_k\ Conexo(R^*) \wedge Conexo(B^*),$$

onde $R^* = R\ \Delta\ \{x_1, \ldots, x_k\}$ e $B^* = B\ \Delta\ \{x_1, \ldots, x_k\}$,
onde Δ é diferença simétrica.

$$MaxTime_k := \exists w, X_0, ..., X_k \forall x\ (w \in X_k \backslash X_{k-1}) \wedge \Big(\bigwedge_{i<k} (X_i x \to X_{i+1} x) \Big)$$

$$\wedge \left(\bigwedge_{i<k} (x \in X_{i+1} \setminus X_i) \to \exists y, z (Exy \wedge Exz \wedge X_i y \wedge X_i z) \right) \wedge \Big(X_k x \Big)$$

Lógica de 2o ordem em grafos

- **Lógica Monádica 2o ordem (MSO):** Quantificação apenas em conjuntos
- MSO_1 (quantificação apenas em conjuntos de vértices)
- MSO_2 (quantificação apenas em conj. de vértices e arestas)
- $Hamilt$: grafo direc. G possui um caminho hamiltoniano?

$$\begin{aligned} Hamilt \ := \ & \exists W \ \exists x, y \ Inicio(W, x) \ \wedge \ Fim(W, y) \ \wedge \\ & \wedge \ \forall z \ Meio(W, z) \vee (z = x) \vee (z = y) \end{aligned}$$

Resumo

- **Lógica de 1o ordem:** $Clique_k$, $Independ_k$, Dom_k, $CobVert_k$, $Roman_p$, P_3-convex$_k$.
- **Lógica Monádica de 2o ordem:** $coColor_{k,\ell}$, $\ell idColor_k$, $Conexo$, $RecolorConvex_k$, $MaxTime_k$, $L(2,1)color_k$.
- **Lógica de 2o ordem:** $Hamilt$ não é MSO_1-expressível.

Complexidade Parametrizada

Fixed Parameter Tractability

- Um problema de decisão é FPT com relação a um parâmetro Ψ se existe um algoritmo que o decide em tempo $f(\Psi) \cdot n^{O(1)}$.
- Definição formal através de linguagens: problema de decisão parametrizado.

Exemplo: $Clique_k$: algoritmo de tempo $O(n^k)$ **não** serve.
Exemplo: $CobVert_k$: algoritm tempo $O(kn + 1.274^k)$ serve [2006]
Exemplo: Parâmetro pode ser:

- k (padrão), ou
- $\Delta(G)$, (Tempo Máximo [S., Marcilon, 2015]) ou
- treewidth$tw(G)$, (Cochromatic [Campos et. al., 2014])
- neighborhood-diversity(G), ([J.Araújo et al., 2015])
- cliquewidth $cwd(G)$, ou vertex-cover(G), ou ...
- bounded vertex-cover $\rightarrow$ bounded tw $\rightarrow$ bounded cwd
- FPT vertex cover $\leftarrow$ FPT treewidth $\leftarrow$ FPT cliquewidth

Teorema de Courcelle, 1995

Problema de decisão em grafos que pode ser expresso por uma MSO-fórmula φ. Então FPT **linear** $O(m+n)$ em $tw(G)+|\varphi|$. Além disso, se φ é MSO_1, então FPT **linear** em $cwd(G)+|\varphi|$.

Corolário

- $Color_k$, $\ell idColor_k$, $RecolorConvex_k$, $MaxTime_k$, $L(2,1)color_k$ são FPT em $cwd(G)+k$.
- $coColor_{k,\ell}$ é FPT linear com relação a $cwd(G)+k+\ell$.
- $Color_k$, $coChromatic_p$ e $\ell idColor_k$ são FPT linear em $tw(G)$.
- $L(2,1)color_k$ **não** é FPT apenas em $tw(G)$.

Problema

- Utilidade existencial: algoritmo do teorema não é "bom".
- Algoritmo Progr. Dinâmica usando Decomposição em Árvore costuma ser mais eficiente (apesar de dar muito trabalho)
- $coColor_{k,\ell}$ é FPT $O(n^3)$ com relação $tw(G)$ [Campos..., 2014]
- $coChromatic_p$ é FPT $O(m+n)$ em $tw(G)$ [Campos..., 2014]

Teorema de Frick-Grohe, 2001

Dado um problema de decisão em grafos que pode ser expresso por uma fórmula 1o ordem, então ele é FPT **quadrático** $O(m+n)^2$ em grafos planares e em grafos com $\Delta(G)$ limitado.

Corolário

- $Clique_k$, $Independ_k$, Dom_k, $CobVert_k$, $Roman_p$, P_3-convex$_k$ são FPT em grafos planares e em grafos com $\Delta(G)$ limitado.

Problema

- Algoritmo muito complicado
- Lógica de 1o ordem não "pega" muita coisa
- **Desafio R$ 20,00:** Extensão para Lógica 1o ordem com Ponto Fixo. Se sim, incluiria $RecolorConvex_k$, pois *Conexo* é 1oOrdem-PF (eu acho !!).
- neighborhood diversity lim. $\rightarrow$ local treewidth lim. ??
- bounded vertex-cover $\rightarrow$ bounded neigh-div $\rightarrow$ bounded cwd
- bounded vertex-cover $\rightarrow$ bounded trewidth $\rightarrow$ bounded cwd

Aplicações para Problemas de Otimização

Considere um problema de otimização em grafos do seguinte tipo:

- Objetivo: obter ℓ (fixo) subconjuntos $X_1, \ldots, X_\ell$
- $X_1, \ldots, X_\ell$ devem satisfazer uma MSO-fórmula dada
- Todo vértice v tem m inteiros associados $f_1(v), \ldots, f_m(v)$
- Max. ou Min.

$$\sum_{i \in [\ell], j \in [m]} a_{ij} \cdot \sum_{v \in X_i} f_j(v)$$

Exemplo Max Weight Clique.

- $\ell = 1$ (ou seja, obter 1 conjunto X_1, que seja uma clique.
- $m = 1$ (ou seja, cada vértice v tem um peso inteiro $f_1(v)$).
- $a_{1,1} = 1$ (ou seja, obter a clique com peso máximo).

Exemplo Roman Number.

- $\ell = 2$ (obter 2 conj X_1, X_2 sat. $Roman(X_1, X_2)$).
- $m = 1$ (cada vértice v tem peso $f_1(v) = 1$).
- $a_{1,1} = 1$ e $a_{2,1} = 2$ (ou seja, minimizar $|X_1| + 2|X_2|$).

Aplicações para Problemas de Otimização

Clique-width $cwd(G)$: menor número de labels necessários para construir G usando 4 operações:

- Criação de um vértice v com label i
- União de dois grafos
- Join label i com label j
- Renomear label i para label j

Cografos $\Leftrightarrow$ $cwd \leq 2$; Distância-hereditária $\Rightarrow$ clique-width ≤ 3
CliqueWidth expression de G (sequência de operações)

Teorema2 de Courcelle, 2000

Seja G tal que $cwd(G) \leq k$ fixo. Se (*) problema OPT "bom" e (**) sabe-se CliqueWidth expression de G, então OPT pode ser resolvido em tempo linear. Se só vale (*), então OPT pode ser resolvido em tempo cúbico (tempo 2^{k+1} para obter expressão).

- Cwd expression para distância-hereditária (Golumbic, 2000)
- S., Szwarcfiter, Kante (2015): aplicações para rank-geodético
- Mais: Hierarquia W, problemas W[2]-completos, ...

Bibliografia

- Courcelle, Makowsky, Rotics: *Linear time solvable optimization problems on graphs of bounded clique-width*, Theory of Computing Systems, **33**, 125–150 (2000).
- Golumbic, Rotics: *On the Clique-Width of Some Perfect Graph Classes*. Int. J. Found. Comp. Sci. **11**, 423–443 (2000).
- Courcelle, Engelfriet: *Graph Structure and Monadic Second-Order Logic - A Language-Theoretic Approach*. Encyclopedia of mathematics and its applications **138**, Cambridge Un.Press (2012).
- Kante, Nourine: *Polynomial Time Algorithms for Computing a Minimum Hull Set in Distance-Hereditary and Chordal Graphs*. SOFSEM, 268–279 (2013).
- Courcelle, Olariu: *Upper bounds to the clique width of graphs*. Discrete Applied Mathematics **101(1-3)**: 77-114 (2000).

Obrigado !! :-)

Vamos trabalhar juntos !! E publicar muitos artigos !!

Perguntas ?? Não valem perguntas sobre ping-pong !!

Pergunta básica: "*Rudini, você me empresta a sua raquete no campeonato de ping-pong do ParGO?*"

Resposta: **Não empresto minha butterfly com três camadas de borracha para "patos"**