Convexidade em Grafos - Aula 01

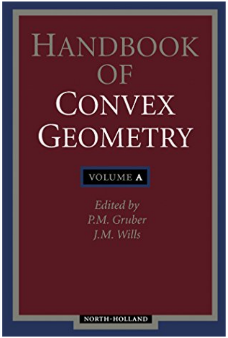
Júlio Araújo, Mitre Dourado,
Fábio Protti, Rudini Sampaio

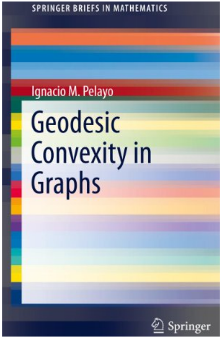
CBM-2023, IMPA,
Rio de Janeiro, segunda, 24-Julho, 8h

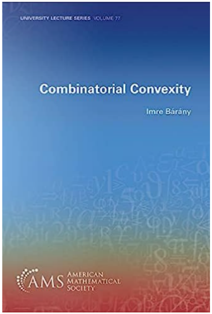
Capítulo 1

Noções Básicas de Convexidade

Convexidade em Geometria

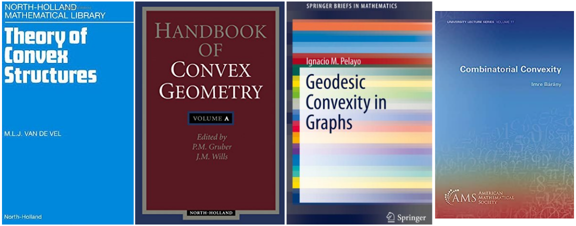






- Convexidade é um tema clássico da Matemática.
- Euclides (300 a.C.): várias contribuições nos "*Elementos*".
- Arquimedes (250 a.C.): 1^o definição precisa de curva/superfície convexa.
- Kepler, Descartes, Euler, Fourier, Gauss, Cauchy, entre outros.
- Minkowski (1910): desenvolvimento sistemático da Teoria da Convexidade
- Teoremas de Carathéodory (1911), Radon (1921), Helly (1923) e Erdős-Szekeres (1935): bases da área de Convexidade Combinatória.

Convexidade em Grafos



- Levi (1951): Convexidade abstrata: desigualdade de Levi $(rd \geq h\ell)$
- Erdős et al. (1972): Convexidade em torneios.
- Harary-Nieminem'1981 *(Convexity in Graphs):* 1^o artigo em grafos gerais
- R. E. Jamison (1982): "*Por que convexidade abstrata?*"

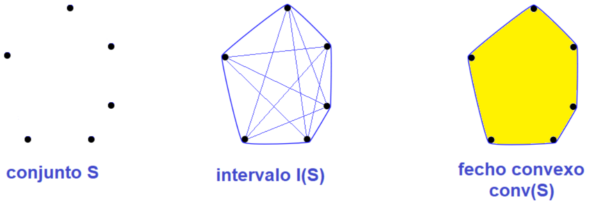
  "Uma possível razão é que convexidade abstrata pode ser feita facilmente. Não é nada difícil criar um conjunto razoável de axiomas para um sistema de conjuntos convexos, um operador de fecho convexo, ou uma função de intervalo generalizada. Mas isso está longe de ser considerado uma resposta satisfatória".

Convexidade em Grafos

- 2000-2010-2020: Pesquisa sobre a complexidade computacional de parâmetros de convexidade em grafos.
- Jayme Szwarcfiter: Grande pesquisador/propagador da área. Só neste livro há 17 referências de artigos do Jayme (citadas 30 vezes).

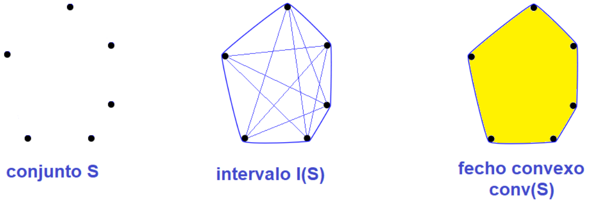
Geometria Convexa: breve resumo

- $\mathbb{R}^d$ o espaço real d–dimensional
- $S \subseteq \mathbb{R}^d$ é *convexo* se S contém todo segmento entre pontos de S
- $\text{conv}(S)$ (*fecho convexo/convex hull*): menor convexo que contém S.



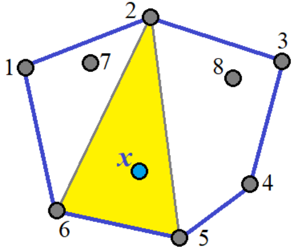
- **Propriedades Essenciais:** A interseção de dois conjuntos convexos em $\mathbb{R}^d$ é um conjunto convexo. Ademais $\emptyset$ e $\mathbb{R}^d$ são convexos.
- **Definição:** x é **ponto extremo** de um conjunto **convexo** S se $x \notin \text{conv}(S \setminus \{x\})$. Seja $\text{Ext}(S)$ pontos extremos de S.
- **Teorema de Minkowski-Krein-Milman:** Todo $S \subseteq \mathbb{R}^d$ convexo fechado e limitado é o fecho convexo de seus pontos extremos.

Geometria Convexa: breve resumo

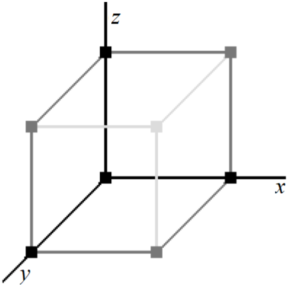


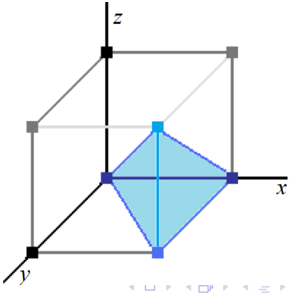
- **Função de intervalo** $\mathrm{I}(S)$ é o conjunto de todo ponto em algum segmento entre dois pontos de S inclusive.
- Obtem-se $\mathrm{conv}(S)$ aplicando sucessivamente a função de intervalo.
- **Tempo de iteração** $\mathrm{ti}(S)$: menor k tq $\mathrm{I}^k(S) = \mathrm{conv}(S)$, ou seja, são necessárias k aplicações da função de intervalo até obter $\mathrm{conv}(S)$

Teoremas Clássicos: Carathéodory (1911)



- **Carathéodory (1911):** Dado $S \subseteq \mathbb{R}^d$, se $x \in \mathrm{conv}(S)$, então existe $C \subseteq S$ com $|C| \leq d+1$ tal que $x \in \mathrm{conv}(C)$.





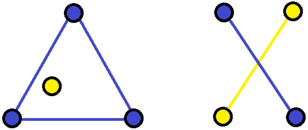
Teoremas Clássicos: Carathéodory (1911)

- **Carathéodory (1911):** Dado $S \subseteq \mathbb{R}^d$, se $x \in \mathrm{conv}(S)$, então existe $C \subseteq S$ com $|C| \leq d+1$ tal que $x \in \mathrm{conv}(C)$.
- **Carathéodory (1911)** equivalente: $\mathrm{cth}(S) \leq d+1$ $\forall S \subseteq \mathbb{R}^d$ convexo
- *Número de Carathéodory* $\mathrm{cth}(S)$ de $S \subseteq \mathbb{R}^d$ convexo: menor c tq $\forall\ S' \subseteq S$ e $x \in \mathrm{conv}(S')$: $\exists C \subseteq S'$ com $|C| \leq c$: $x \in \mathrm{conv}(C)$.
- Número de Carathéodory alternativo: $\mathrm{cth}(S)$ é o tamanho do maior subconjunto Carathéodory independente $C \subseteq S$, onde C é *Carathéodory independente* se

$$\mathrm{conv}(C) \neq \bigcup_{x \in C} \mathrm{conv}(C \setminus \{x\}).$$

Teoremas Clássicos: Radon (1921)

- $S \subseteq \mathbb{R}^d$ é *Radon dependente* se pode ser particionado em k=2 conj cujos fechos convexos se intersectam; cc, é *Radon independente*.



- **Radon (1921):** Todo $S \subseteq \mathbb{R}^d$ com $|S| \geq d+2$ é Radon dependente. Ou seja, todo conjunto Radon independente tem $\leq d+1$ pontos.
- **Radon (1921) equivalente:** $\mathrm{rd}(S) \leq d+1 \quad \forall S \subseteq \mathbb{R}^d$ convexo.
- *Número de Radon* $\mathrm{rd}(S)$ de $S \subseteq \mathbb{R}^d$ convexo: tamanho do maior subconjunto Radon independente $S' \subseteq S$.

- **Generalização - Tverberg (1966):** Todo $S \subseteq \mathbb{R}^d$ com $(d+1)(k-1)+1$ pontos é Radon k-dependente.

Teoremas Clássicos: Helly (1923)

- **Helly (1923):** Se $\mathcal{F}$ é uma família de conjuntos convexos em $\mathbb{R}^d$ tal que cada $d+1$ membros de $\mathcal{F}$ tem um ponto em comum, então todos os membros de $\mathcal{F}$ tem um ponto em comum.

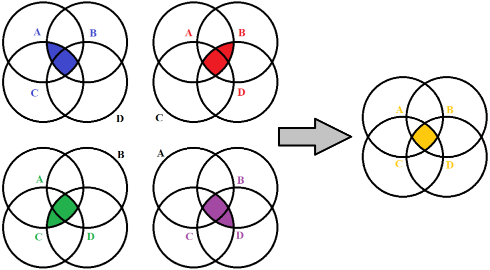


Figure: Exemplo $\mathbb{R}^2$: interseção não vazia 3 a 3 $\Rightarrow$ interseção não vazia total

- Típico teorema *Helly-type*: *Se cada grupo de n membros de uma família de objetos possui uma certa propriedade, então toda a família possui essa propriedade*. *Propriedade* aqui é ter um ponto em comum.
- **Bárány (2021):** Generalizações do Teorema de Helly com cores.

Teoremas Clássicos: Helly (1923)

- **Helly (1923):** Se $\mathcal{F}$ é uma família de conjuntos convexos em $\mathbb{R}^d$ tal que cada $d+1$ membros de $\mathcal{F}$ tem um ponto em comum, então todos os membros de $\mathcal{F}$ tem um ponto em comum.

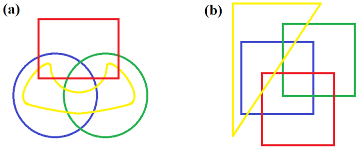


Figure: Exemplos do Teorema de Helly: casos não contemplados

- **Helly (1911)** equivalente: $h\ell(S) \leq d+1 \ \forall S \subseteq \mathbb{R}^d$ convexo
- *Número de Helly* $h\ell(S)$ de S convexo: menor $h \geq 2$ tq, se cada h membros de uma família $\mathcal{F}$ de subconj convexos de S têm ponto em comum, então há um ponto em comum a todos os membros de $\mathcal{F}$.
- Número de Helly alternativo $h\ell(S)$: tam. maior subconjunto Helly independente $H \subseteq S$, onde H é *Helly independente* se $\bigcap_{x \in H} \mathrm{conv}(H \setminus \{x\}) = \emptyset$. [Berge-Duchet'1975].

Teoremas Clássicos: Erdős-Szekeres (1935)

Pontos em Posição Geral

- $S \subseteq \mathbb{R}^d$ **finito** em *posição geral*: se não tem 3 pontos colineares.
- *Número posição geral* $\mathrm{gp}(S)$: maior subconj de S em posição geral.
- *No-Three-in-Line Problem* de Dudeney (1917): para caso $S = \{1, \ldots, m\}^2 \subseteq \mathbb{N}^2$, em aberto para $m > 46$.

Pontos em Posição Convexa

- $S \subseteq \mathbb{R}^d$ **finito** em *posição convexa (ou convexamente independent)*: se $\nexists x \in S : \; x \in \mathrm{conv}(S \setminus \{x\})$.
- *Número posição convexa (rank)* $\mathrm{rk}(S)$: maior subconjunto de S em posição convexa. [R.E.Jamison'1981]

Teorema de Erdős-Szekeres (1935)

- $\forall d, n : \exists N$: todo $S \subseteq \mathbb{R}^d$ de tam N em posição geral
- tem subconjunto de tam n em posição convexa, ou seja, $\mathrm{rk}(S) \geq n$

Teoremas Clássicos: Erdős-Szekeres (1935)

Teorema de Erdős-Szekeres (1935)

- $\forall d, n : \exists N$:   todo $S \subseteq \mathbb{R}^d$ de tam N em posição geral
- tem subconjunto de tam n em posição convexa,   ou seja, $\mathrm{rk}(S) \geq n$

Esther Klein (Szekeres)   *George Szekeres*   *Paul Erdős*

- Generalização do **Happy Ending Theorem (Esther Klein'1933):** todo conjunto de 5 pontos em posição geral no plano possui um subconjunto de 4 pontos em posição convexa (quadrilátero convexo).

Capítulo 2

Convexidade em Grafos

Definição de Convexidade Abstrata

Definição de Convexidade

- Convexidade $\mathcal{C}$ sobre conjunto V finito (Levi'1951): família $\mathcal{C}$ de subconjuntos de V fechada sob interseção[1] tais $\emptyset, V \in \mathcal{C}$.
- Os membros de $\mathcal{C}$ são chamados **conjuntos convexos** em $\mathcal{C}$.
- Resumo: $\emptyset$ e V são convexos em $\mathcal{C}$ e a interseção de dois conjuntos convexos em $\mathcal{C}$ também é convexa em $\mathcal{C}$.

Exemplo para $V = \{a, b\}$

- $\mathcal{C}_1 = \Big\{ \emptyset, \quad \{a, b\} \Big\}$;
- $\mathcal{C}_2 = \Big\{ \emptyset, \ \{a\}, \quad \{a, b\} \Big\}$;
- $\mathcal{C}_3 = \Big\{ \emptyset, \quad \{b\}, \ \{a, b\} \Big\}$;
- $\mathcal{C}_4 = \Big\{ \emptyset, \ \{a\}, \ \{b\}, \ \{a, b\} \Big\}$.

[1] Para conjuntos infinitos, é necessária mais uma condição: a união infinita de conjuntos convexos aninhados é convexa.

Definição de Fecho Convexo $\text{conv}_{\mathcal{C}}(S)$

Definição de Fecho Convexo

- *Fecho convexo* $\text{conv}_{\mathcal{C}}(S)$ de $S \subseteq V$ é o menor conjunto $\mathcal{C}$-convexo contendo S.

Com fecho convexo, definem-se $\text{cth}_{\mathcal{C}}(S)$, $\text{rd}_{\mathcal{C}}(S)$, $\text{h}\ell_{\mathcal{C}}(S)$ e $\text{rk}_{\mathcal{C}}(S)$ de um conjunto S na convexidade $\mathcal{C}$ analogamente.

- $\text{cth}_{\mathcal{C}}(S)$: tam maior subc Carathéodory independente $C \subseteq S$ em $\mathcal{C}$: $\bigcup_{x \in C} \text{conv}_{\mathcal{C}}(C \setminus \{x\}) \neq \text{conv}_{\mathcal{C}}(C)$.
- $\text{rd}_{\mathcal{C}}(S)$: tam maior subconjunto Radon independente $R \subseteq S$ em $\mathcal{C}$: $\nexists$ bipartição (R_1, R_2) de R tq $\text{conv}_{\mathcal{C}}(R_1) \cap \text{conv}_{\mathcal{C}}(R_2) \neq \emptyset$.
- $\text{h}\ell_{\mathcal{C}}(S)$: tam maior subconjunto Helly independente $H \subseteq S$ em $\mathcal{C}$: $\bigcap_{x \in H} \text{conv}_{\mathcal{C}}(H \setminus \{x\}) = \emptyset$.
- $\text{rk}_{\mathcal{C}}(S)$: tam maior subc convexamente independente $P \subseteq S$ em $\mathcal{C}$: $\nexists x \in P :\ \text{conv}_{\mathcal{C}}(P \setminus \{x\})$.

Para definir $\text{ti}_{\mathcal{C}}(S)$ e $\text{gp}_{\mathcal{C}}(S)$ precisamos do conceito de intervalo $\mathrm{I}_{\mathcal{C}}(S)$.

Definição de Fecho Convexo $\text{conv}_{\mathcal{C}}(S)$

Definição de Fecho Convexo

- *Fecho convexo* $\text{conv}_{\mathcal{C}}(S)$ de $S \subseteq V$ é o menor conjunto $\mathcal{C}$-convexo contendo S.

Com fecho convexo, definem-se $\text{cth}_{\mathcal{C}}(S)$, $\text{rd}_{\mathcal{C}}(S)$, $\text{h}\ell_{\mathcal{C}}(S)$ e $\text{rk}_{\mathcal{C}}(S)$ de um conjunto S na convexidade $\mathcal{C}$ analogamente.

Propriedades de Operador de Fecho

O fecho convexo $\text{conv}_{\mathcal{C}}(\cdot)$ é um *operador de fecho (closure operator)*, ou seja, para todo $S, S' \subseteq V$:

(i) $S \subseteq \text{conv}_{\mathcal{C}}(S)$ (extensividade);

(ii) $S \subseteq S' \Rightarrow \text{conv}_{\mathcal{C}}(S) \subseteq \text{conv}_{\mathcal{C}}(S')$ (monotonicidade);

(iii) $\text{conv}_{\mathcal{C}}(\emptyset) = \emptyset$ (normalização[2]);

(iv) $\text{conv}_{\mathcal{C}}(\text{conv}_{\mathcal{C}}(S)) = \text{conv}_{\mathcal{C}}(S)$ (idempotência).

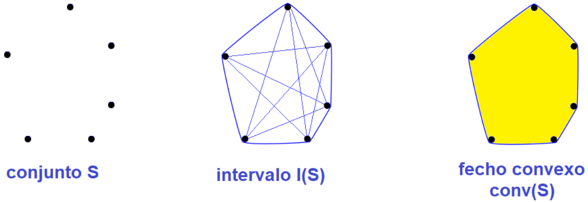
Para definir $\text{ti}_{\mathcal{C}}(S)$ e $\text{gp}_{\mathcal{C}}(S)$ precisamos do conceito de intervalo $\mathrm{I}_{\mathcal{C}}(S)$.

[2]De acordo com Van de Vel'1993, alguns autores não consideram a normalização.

Definição de Intervalo $\mathrm{I}_{\mathcal{C}}(S)$

Definição original de intervalo (Calder'1971)

- Função $\mathrm{I} : \binom{V}{2} \to 2^V$ tal que $a, b \in \mathrm{I}(\{a, b\})$.
- Família $\mathcal{C}$ **induzida** por $\mathrm{I}(\cdot)$: conjuntos S tais que $\mathrm{I}(S) = S$, onde $\mathrm{I}(S) = \bigcup_{a,b \in S} \mathrm{I}(\{a, b\})$.
- Prova-se que família induzida por $\mathrm{I}(S)$ é uma **convexidade** sobre V.



Definição ampliada de Intervalo

$\mathrm{I} : 2^V \to 2^V$ é uma *função de intervalo* sobre V se para todo $S, S' \subseteq V$:

(i) $S \subseteq \mathrm{I}(S)$ (extensividade);

(ii) $S \subseteq S' \Rightarrow \mathrm{I}(S) \subseteq \mathrm{I}(S')$ (monotonicidade);

(iii) $\mathrm{I}(\emptyset) = \emptyset$ (normalização).

Definição de Intervalo $\mathrm{I}_{\mathcal{C}}(S)$

Definição de Intervalo

$\mathrm{I} : 2^V \to 2^V$ é uma *função de intervalo* sobre V se para todo $S, S' \subseteq V$:

(i) $S \subseteq \mathrm{I}(S)$ (extensividade);

(ii) $S \subseteq S' \;\Rightarrow\; \mathrm{I}(S) \subseteq \mathrm{I}(S')$ (monotonicidade);

(iii) $\mathrm{I}(\emptyset) \;=\; \emptyset$ (normalização).

Lema: A família $\mathcal{C}$ de subconjunt de V **induzida** por $\mathrm{I}(\cdot)$ é convexidade.

Prova: (i) $\Rightarrow V \subseteq \mathrm{I}(V) \subseteq V \Rightarrow \mathrm{I}(V) = V \Rightarrow V \in \mathcal{C}$. (iii) $\Rightarrow \emptyset \in \mathcal{C}$. Finalmente, sejam S_1 e S_2 dois conjuntos em $\mathcal{C}$. Por definição, $\mathrm{I}(S_1) = S_1$ e $\mathrm{I}(S_2) = S_2$. De (ii), $\mathrm{I}(S_1 \cap S_2) \subseteq \mathrm{I}(S_1) = S_1$ e $\mathrm{I}(S_1 \cap S_2) \subseteq \mathrm{I}(S_2) = S_2$. Portanto, $\mathrm{I}(S_1 \cap S_2) \subseteq S_1 \cap S_2$. De (i), $S_1 \cap S_2 \subseteq \mathrm{I}(S_1 \cap S_2)$. Portanto, $\mathrm{I}(S_1 \cap S_2) = S_1 \cap S_2$ e consequentemente $S_1 \cap S_2$ está em $\mathcal{C}$. Como $\mathcal{C}$ é fechada sob interseção e $\emptyset, V \in \mathcal{C}$, então $\mathcal{C}$ é uma convexidade.

Convexidade de Intervalos

$\mathrm{I} : 2^V \to 2^V$ é uma *função de intervalo* sobre V se para todo $S, S' \subseteq V$:

(i) $S \subseteq \mathrm{I}(S)$ (extensividade);

(ii) $S \subseteq S' \;\Rightarrow\; \mathrm{I}(S) \subseteq \mathrm{I}(S')$ (monotonicidade);

(iii) $\mathrm{I}(\emptyset) \;=\; \emptyset$ (normalização).

Convexidade $\mathcal{C}$ de intervalos: $\mathrm{I}_{\mathcal{C}}(\cdot)$ é dada

- Toda função de intervalo induz uma única convexidade.
- Toda convexidade pode ser induzida por uma (ou mais de uma) função de intervalo (por exemplo, o próprio fecho convexo).
- Quando na definição de uma convexidade $\mathcal{C}$ é associada explicitamente uma função de intervalo $\mathrm{I}_{\mathcal{C}}(\cdot)$ que a induz, dizemos que $\mathcal{C}$ é uma *convexidade de intervalos*.
- As principais convexidades estudadas são convexidades de intervalo ($\mathrm{I}_{\mathcal{C}}(\cdot)$ é claramente definida).
- Formalmente (van de Vel'1993): espaço de convexidade $(V, \mathcal{C})$ **versus** espaço de convexidade de intervalo $(V, \mathrm{I}_{\mathcal{C}})$.
- Evitamos essa terminologia e consideramos que toda convexidade $\mathcal{C}$ é de intervalo e, portanto, tem um função de intervalo $\mathrm{I}_{\mathcal{C}}$ associada.

Convexidade de Intervalos

$\mathrm{I}: 2^V \to 2^V$ é uma *função de intervalo* sobre V se para todo $S, S' \subseteq V$:

(i) $S \subseteq \mathrm{I}(S)$ (extensividade);

(ii) $S \subseteq S' \Rightarrow \mathrm{I}(S) \subseteq \mathrm{I}(S')$ (monotonicidade);

(iii) $\mathrm{I}(\emptyset) = \emptyset$ (normalização).

R. E. Jamison (1982): "*Por que convexidade abstrata?*"

"Uma possível razão é que convexidade abstrata pode ser feita facilmente. Não é nada difícil criar um conjunto razoável de axiomas para um sistema de conjuntos convexos, um operador de fecho convexo, ou uma função de intervalo generalizada. Mas isso está longe de ser considerado uma resposta satisfatória".

- Convexidade $\mathcal{C}$ **induzida** por $\mathrm{I}(\cdot)$: conjuntos S tais que $\mathrm{I}(S) = S$.
- Convexidade $\mathcal{C}$ sobre conjunto V finito (Levi'1951): família $\mathcal{C}$ de subconjuntos de V fechada sob interseção tais $\emptyset, V \in \mathcal{C}$.

Tempo de iteração e Número de Posição Geral

O fecho convexo de S pode ser obtido com a aplicação sucessiva da função de intervalo $\mathrm{I}_{\mathcal{C}}(\cdot)$ até se obter um conjunto convexo, ou seja: $\mathrm{conv}_{\mathcal{C}}(S) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathrm{I}_{\mathcal{C}}^{k}(S)$, onde $\mathrm{I}_{\mathcal{C}}^{k}(S)$ é a k-ésima iteração de $\mathrm{I}_{\mathcal{C}}(\cdot)$ sobre S:

- $\mathrm{I}_{\mathcal{C}}^{0}(S) = S$ e $\mathrm{I}_{\mathcal{C}}^{k+1}(S) = \mathrm{I}_{\mathcal{C}}(\mathrm{I}_{\mathcal{C}}^{k}(S))$ para todo $k \geq 0$.

Costuma-se dizer que S *gera/ativa/infecta* $\mathrm{I}_{\mathcal{C}}(S)$ em 1 passo ou $\mathrm{conv}_{\mathcal{C}}(S)$ em tantos passos na convexidade $\mathcal{C}$.

Com função de intervalo $\mathrm{I}_{\mathcal{C}}$, definimos como antes o **tempo de iteração** e o **número de posição geral** para uma convexidade $\mathcal{C}$.

- Tempo de iteração $\mathrm{ti}_{\mathcal{C}}(S)$: menor k tq $\mathrm{I}_{\mathcal{C}}^{k}(S) = \mathrm{conv}_{\mathcal{C}}(S)$.
- Número de posição geral $\mathrm{gp}_{\mathcal{C}}(S)$: tam do maior $S' \subseteq S$ em posição geral em $\mathcal{C}$, onde S' está em *posição geral* se não tem 3 elementos x, y, z tais que $z \in \mathrm{I}_{\mathcal{C}}(\{x, y\})$.

Exemplo: $n \geq 2$, $V = [n] = \{1, 2, \ldots, n\}$ e $\mathcal{C} = \{\emptyset, [n]\}$. Função de intervalo $\mathrm{I}_{\mathcal{C}}(\emptyset) = \emptyset$, $\mathrm{I}_{\mathcal{C}}([n]) = [n]$ e $\mathrm{I}_{\mathcal{C}}(S) = S \cup \{\min([n] \setminus S)\}$, se $S \notin \mathcal{C}$.

Os 10 Parâmetros de Convexidade de Grafos

Dado um grafo finito G, dizemos que $\mathcal{C}$ é uma **convexidade no grafo G** se $\mathcal{C}$ é uma convexidade de intervalos sobre $V = V(G)$.

1. $\mathrm{hn}(G)$: **num Envoltória:** tam menor conjunto de envoltória S de G na convexidade $\mathcal{C}$: $\mathrm{conv}_{\mathcal{C}}(S) = V$.
2. $\mathrm{in}(G)$: **num de Intervalo:** tam menor conjunto de intervalo S de G na convexidade $\mathcal{C}$: $\mathrm{I}_{\mathcal{C}}(S) = V$.
3. $\mathrm{con}(G)$: **num Convexidade:** tam maior conj convexo $S \subsetneq V$ em $\mathcal{C}$.
4. $\mathrm{cth}(G)$: **num Carathéodory:** $\mathrm{cth}_{\mathcal{C}}(G) = \mathrm{cth}_{\mathcal{C}}(V)$.
5. $\mathrm{rd}(G)$: **num Radon:** $\mathrm{rd}_{\mathcal{C}}(G) = \mathrm{rd}_{\mathcal{C}}(V)$.
6. $\mathrm{h}\ell(G)$: **num Helly:** $\mathrm{h}\ell_{\mathcal{C}}(G) = \mathrm{h}\ell_{\mathcal{C}}(V)$.
7. $\mathrm{rk}(G)$: **Posto (rank):** $\mathrm{rk}_{\mathcal{C}}(G) = \mathrm{rk}_{\mathcal{C}}(V)$.
8. $\mathrm{gp}(G)$: **num Posição Geral:** $\mathrm{gp}_{\mathcal{C}}(G) = \mathrm{gp}_{\mathcal{C}}(V)$.
9. $\mathrm{ti}(G)$: **Tempo de Iteração:** max $\mathrm{ti}_{\mathcal{C}}(S)$ entre conjuntos $S \subseteq V$.
10. $\mathrm{tp}(G)$: **Tempo de Percolação:** max $\mathrm{ti}_{\mathcal{C}}(S)$ entre conjuntos $S \subseteq V$, que são conjuntos de envoltória.

Convexidades de Caminhos em Grafos

Dada família $\mathcal{P}$ de caminhos em G, seja função $\mathrm{I}_{\mathcal{P}}(S)$ igual a S mais todo vértice em qualquer caminho de $\mathcal{P}$ com ambas as extremidades em S.

Lema: Dada uma família $\mathcal{P}$ de caminhos em G: $\mathrm{I}_{\mathcal{P}}(\cdot)$ é uma função de intervalo sobre $V(G)$ e portanto induz uma convexidade em G.

Prova: Extensividade, Monotonicidade, Normalização Ok. $\square$

As convexidades de grafos mais estudadas são convexidades de caminhos:

- *Convexidade Geodésica* [Harary, Nieminem, 1981]
- *Convexidade Monofônica* [R.E.Jamison, 1982]
- *Convexidade* m^3 [Dragan, Nicolai, Brandstädt, 1999]
- *Convexidade* P_3 [Centeno, Dourado, Szwarcfiter, 2009]
- *Convexidade* P_3^* [R.T.Araújo, Sampaio, Szwarcfiter, 2013]

sendo $\mathcal{P}$ respectivamente a família de todo caminho mínimo, ou induzido, ou induzido com ≥ 3 vértices, ou P_3 qualquer, ou P_3 induzido.

Convexidades de Caminhos em Grafos

Dada família $\mathcal{P}$ de caminhos em G, seja função $\mathrm{I}_{\mathcal{P}}(S)$ igual a S mais todo vértice em qualquer caminho de $\mathcal{P}$ com ambas as extremidades em S.

As convexidades de grafos mais estudadas são convexidades de caminhos:

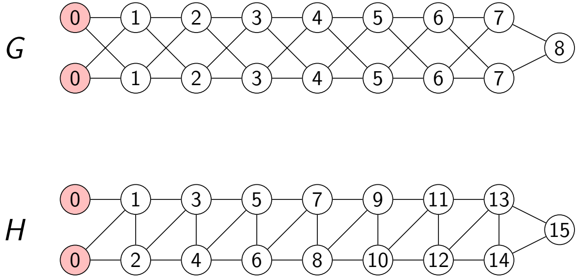
- *Convexidade Geodésica* [Harary, Nieminem, 1981]
- *Convexidade Monofônica* [R.E.Jamison, 1982]
- *Convexidade* m^3 [Dragan, Nicolai, Brandstädt, 1999]
- *Convexidade* P_3 [Centeno, Dourado, Szwarcfiter, 2009]
- *Convexidade* P_3^* [R.T.Araújo, Sampaio, Szwarcfiter, 2013]

sendo $\mathcal{P}$ respectivamente a família de todo caminho mínimo, ou induzido, ou induzido com ≥ 3 vértices, ou P_3 qualquer, ou P_3 induzido.

Classes de grafos

- Distância-heredit: cam induzido $\Rightarrow$ mínimo. Geodésica=Monofônica
- Diâmetro 2: Geodésica $= P_3^*$
- Livre de triângulo: $P_3 = P_3^*$

Convexidades de Caminhos em Grafos (Exemplos)



Exemplos simples: Convexidades Geodésica, Monofônica e P_3

- $\mathrm{hn_g}(G) = \mathrm{hn_m}(G) = \mathrm{hn_{p3}}(G) = \mathrm{hn_{p3}}(H) = 2$
- $\mathrm{in_g}(G) = \mathrm{in_m}(G) = 3;$ $\qquad \mathrm{in_{p3}}(G) = 6$
- $\mathrm{con_g}(H) = \mathrm{con_m}(H) = \mathrm{con_{p3}}(H) = n - 1 = 16$
- $\mathrm{ti_{p3}}(G) = \mathrm{tp_{p3}}(G) = 8$
- $\mathrm{ti_{p3}}(H) = \mathrm{tp_{p3}}(H) = 15.$ Tempos sempre iguais?

Convexidades não baseadas em Caminhos

Exemplos

- Convexidade de Steiner [Cáceres, Márquez, Puertas, 2008]
- Convex r-intervalo [Dourado, Rautenbach, Santos, Schäfer, Szwarcfiter, 2013]
- Convexidade $\mathcal{F}$-livre [Dourado, Gutierrez, Protti, Sampaio, Tondato, 2022]
- Convexidade TSS [R.T.Araújo, Sampaio, 2023]

Convexidade TSS

- Função limiar $\tau : V(G) \to \mathbb{N}$.
- Convexidade TSS (Target Set Selection): cada vértice v tem um limiar $\tau(v)$ próprio de vizinhos necessários para sua ativação.
- Função de intervalo $\mathrm{I}_\tau(S)$ contém S mais todo vértice v fora de S que tem pelo menos $\tau(v)$ vizinhos em S.
- Convexidade P_3: $\tau(v) = 2$ para todo vértice v.
- I_τ é uma função de intervalo **se e só se** $\tau(v) > 0 \ \ \forall v \in V(G)$.

FIM DA AULA 01

FIM DA AULA 01

Perguntas (se houver tempo) ??

Convexidade em Grafos - Aula 02

Júlio Araújo, Mitre Dourado,
Fábio Protti, Rudini Sampaio

CBM-2023, IMPA,
Rio de Janeiro, terça, 25-Julho, 8h

Capítulo 3

Parâmetros de Convexidade

Introdução

- Dez parâmetros mais estudados em convexidade em grafos
- Convexidades mais conhecidas: geodésica, monofônica e P_3
- $\mathrm{Ext}(G)$ é o conjunto de pontos extremos de $V(G)$
- Todo vértice $v \in \mathrm{Ext}(G)$ deve estar em qualquer conjunto de intervalo (e de envoltória)

Introdução

- Dez parâmetros mais estudados em convexidade em grafos
- Convexidades mais conhecidas: geodésica, monofônica e P_3
- $\mathrm{Ext}(G)$ é o conjunto de pontos extremos de $V(G)$
- Todo vértice $v \in \mathrm{Ext}(G)$ deve estar em qualquer conjunto de intervalo (e de envoltória)

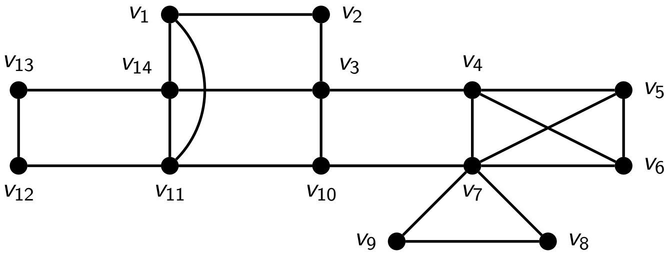
Introdução

- Dez parâmetros mais estudados em convexidade em grafos
- Convexidades mais conhecidas: geodésica, monofônica e P_3
- $\text{Ext}(G)$ é o conjunto de pontos extremos de $V(G)$
- Todo vértice $v \in \text{Ext}(G)$ deve estar em qualquer conjunto de intervalo (e de envoltória)

Número de Intervalo

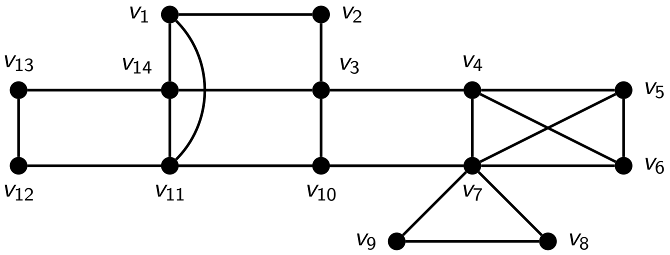
- O *número de intervalo* $\text{in}(G)$ é o tamanho do menor conjunto de intervalo do grafo G.

Número de Intervalo



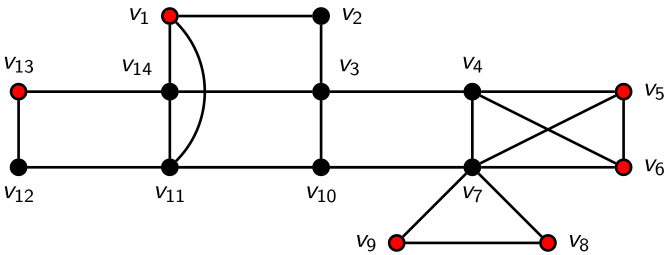
- vértices simpliciais v_5, v_6, v_8 e v_9

Número de Intervalo



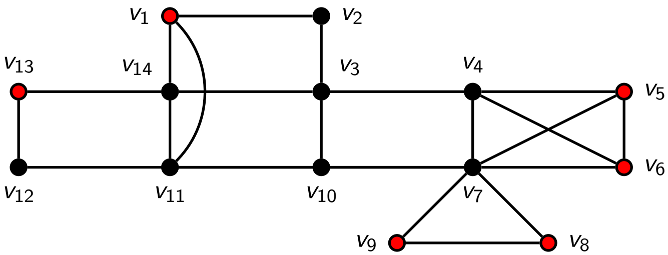
- vértices simpliciais v_5, v_6, v_8 e v_9

Número de Intervalo



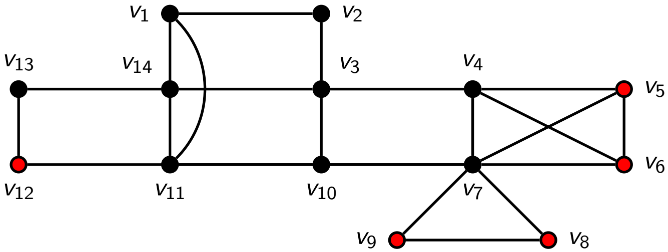
- $\mathrm{in_g}(G_1) = 6$

Número de Intervalo



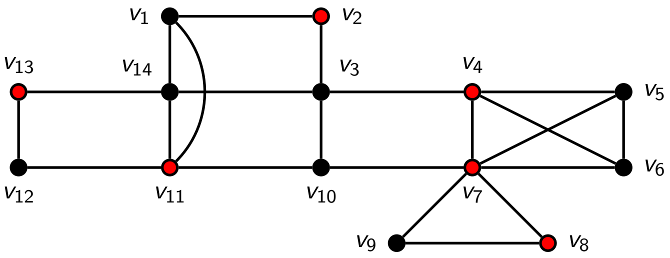
- $\mathrm{in}_{\mathrm{g}}(G_1) = 6$

Número de Intervalo



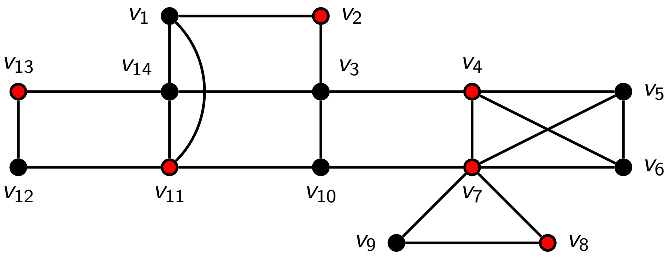
- Na convexidade monofônica, $\{v_5, v_6, v_8, v_9, v_{12}\}$ é um conjunto de intervalo de G_1 de tamanho 5 ($\text{in}_\text{m}(G) = 5$)

Número de Intervalo



- Na convexidade P_3, $\{v_2, v_4, v_7, v_8, v_{11}, v_{13}\}$ é um conjunto de intervalo de G_1 de tamanho 6 ($\text{in}_{p3}(G_1) = 6 > \text{hn}_{p3}(G_1) = 4$)

Número de Intervalo



- Na convexidade P_3, $\{v_2, v_4, v_7, v_8, v_{11}, v_{13}\}$ é um conjunto de intervalo de G_1 de tamanho 6 ($\mathrm{in}_{\mathrm{p3}}(G_1) = 6 > \mathrm{hn}_{\mathrm{p3}}(G_1) = 4$)

Número de Intervalo

- Para árvores nas convexidades geodésica e monofônica, $\mathrm{in_g}(T)$ e $\mathrm{in_m}(T)$ são iguais ao número de folhas para toda árvore T.
- Para ciclos, $\mathrm{in_g}(C_n) = \mathrm{hn_g}(C_n)$ e $\mathrm{in_m}(C_n) = \mathrm{hn_m}(C_n)$.
- Para o grafo completo K_n com pelo menos $n \geq 2$ vértices, é fácil ver que $\mathrm{in_g}(K_n) = \mathrm{in_m}(K_n) = n$ e que $\mathrm{in_{p3}}(K_n) = 2$.

Número de Intervalo

- Para árvores nas convexidades geodésica e monofônica, $\mathrm{in}_{\mathrm{g}}(T)$ e $\mathrm{in}_{\mathrm{m}}(T)$ são iguais ao número de folhas para toda árvore T.
- Para ciclos, $\mathrm{in}_{\mathrm{g}}(C_n) = \mathrm{hn}_{\mathrm{g}}(C_n)$ e $\mathrm{in}_{\mathrm{m}}(C_n) = \mathrm{hn}_{\mathrm{m}}(C_n)$.
- Para o grafo completo K_n com pelo menos $n \geq 2$ vértices, é fácil ver que $\mathrm{in}_{\mathrm{g}}(K_n) = \mathrm{in}_{\mathrm{m}}(K_n) = n$ e que $\mathrm{in}_{\mathrm{p3}}(K_n) = 2$.

Número de Intervalo

- Para árvores nas convexidades geodésica e monofônica, $\mathrm{in_g}(T)$ e $\mathrm{in_m}(T)$ são iguais ao número de folhas para toda árvore T.
- Para ciclos, $\mathrm{in_g}(C_n) = \mathrm{hn_g}(C_n)$ e $\mathrm{in_m}(C_n) = \mathrm{hn_m}(C_n)$.
- Para o grafo completo K_n com pelo menos $n \geq 2$ vértices, é fácil ver que $\mathrm{in_g}(K_n) = \mathrm{in_m}(K_n) = n$ e que $\mathrm{in_{p3}}(K_n) = 2$.

Número de Envoltória

- O *número de envoltória* $\text{hn}(G)$ é o tamanho do menor conjunto de envoltória de G
- $\text{hn}(G) \leq \text{in}(G)$
- $\text{hn}(G) \geq |\text{Ext}(G)|$

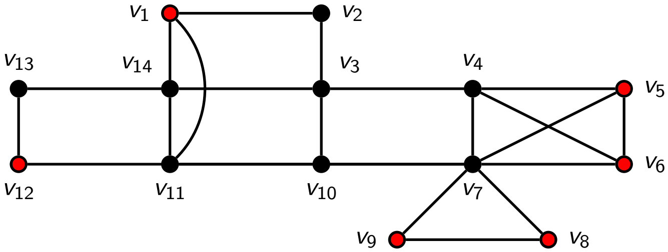
Número de Envoltória

- O *número de envoltória* $\mathrm{hn}(G)$ é o tamanho do menor conjunto de envoltória de G
- $\mathrm{hn}(G) \leq \mathrm{in}(G)$
- $\mathrm{hn}(G) \geq |\mathrm{Ext}(G)|$

Número de Envoltória

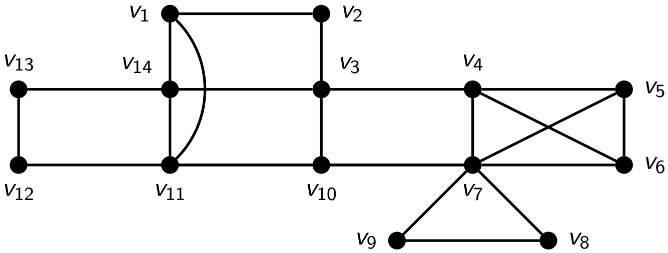
- O *número de envoltória* $\text{hn}(G)$ é o tamanho do menor conjunto de envoltória de G
- $\text{hn}(G) \leq \text{in}(G)$
- $\text{hn}(G) \geq |\text{Ext}(G)|$

Número de Envoltória

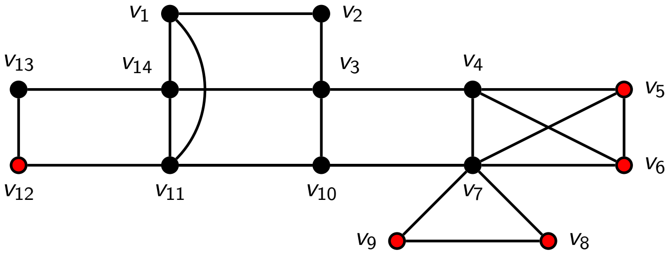


- Na convexidade geodésica, $\{v_1, v_5, v_6, v_8, v_9, v_{12}\}$ é um conjunto de envoltória de G_1 de tamanho 6 ($\mathrm{hn_g}(G) = 6$)

Número de Envoltória

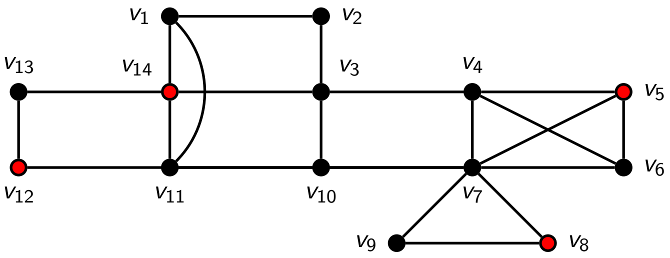


Número de Envoltória



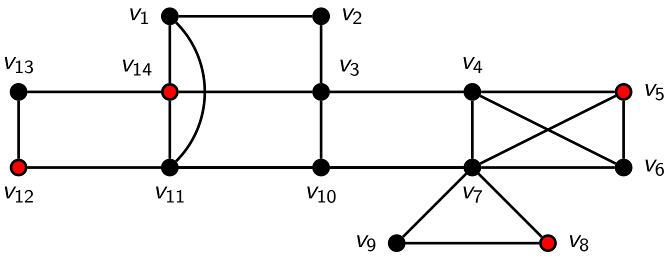
- Na convexidade monofônica, $\{v_5, v_6, v_8, v_9, v_{12}\}$ é um conjunto de envoltória de G_1 de tamanho 5 ($\mathrm{hn_m}(G) = 5$)

Número de Envoltória



- Na convexidade P_3, $\{v_5, v_8, v_{12}, v_{14}\}$ é um conjunto de envoltória de G_1 de tamanho 4 ($\mathrm{hn}_{\mathrm{p3}}(G) = 4$)

Número de Envoltória



- Na convexidade P_3, $\{v_5, v_8, v_{12}, v_{14}\}$ é um conjunto de envoltória de G_1 de tamanho 4 ($\mathrm{hn_{p3}}(G) = 4$)

Número de Envoltória

- Para toda árvore T, $\text{hn}_\text{g}(T) = \text{hn}_\text{m}(T) =$ número de folhas de T.
- Em um ciclo C_n com $n \geq 3$ e vértices $v_1 v_2 \ldots v_n$, não há vértices simpliciais, mas é fácil ver que quaisquer 2 vértices não adjacentes formam um conjunto de envoltória na convexidade monofônica.
- Assim $\text{hn}_\text{m}(C_3) = 3$ e $\text{hn}_\text{m}(C_n) = 2$ para $n \geq 4$.

Número de Envoltória

- Para toda árvore T, $\mathrm{hn_g}(T) = \mathrm{hn_m}(T) =$ número de folhas de T.
- Em um ciclo C_n com $n \geq 3$ e vértices $v_1 v_2 \ldots v_n$, não há vértices simpliciais, mas é fácil ver que quaisquer 2 vértices não adjacentes formam um conjunto de envoltória na convexidade monofônica.
- Assim $\mathrm{hn_m}(C_3) = 3$ e $\mathrm{hn_m}(C_n) = 2$ para $n \geq 4$.

Número de Envoltória

- Para toda árvore T, $\mathrm{hn_g}(T) = \mathrm{hn_m}(T) =$ número de folhas de T.
- Em um ciclo C_n com $n \geq 3$ e vértices $v_1 v_2 \ldots v_n$, não há vértices simpliciais, mas é fácil ver que quaisquer 2 vértices não adjacentes formam um conjunto de envoltória na convexidade monofônica.
- Assim $\mathrm{hn_m}(C_3) = 3$ e $\mathrm{hn_m}(C_n) = 2$ para $n \geq 4$.

Número de Envoltória

- Na convexidade geodésica, 2 vértices são suficientes se n é par e 3 vértices são necessários e suficientes se n é ímpar.
- Assim $\mathrm{hn_g}(C_n) = 2$ se n é par e $\mathrm{hn_g}(C_n) = 3$ se n é ímpar.

Número de Envoltória

- Na convexidade geodésica, 2 vértices são suficientes se n é par e 3 vértices são necessários e suficientes se n é ímpar.
- Assim $\mathrm{hn_g}(C_n) = 2$ se n é par e $\mathrm{hn_g}(C_n) = 3$ se n é ímpar.

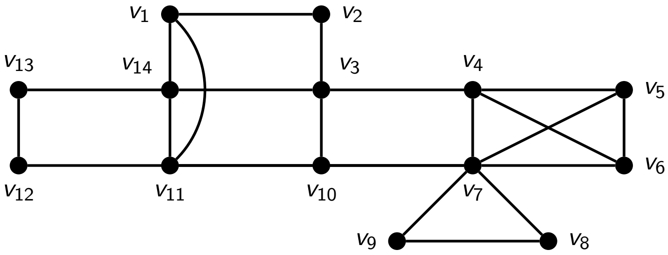
Número de Convexidade

- O *número de convexidade* $\text{con}(G)$ é o tamanho do maior conjunto convexo próprio do grafo G
- Nas convexidades geodésica e monofônica, temos que $\text{con}(G) = n - 1$ se, e somente se, G tem vértice simplicial. Portanto, $\text{con}_{\text{g}}(K_n) = \text{con}_{\text{m}}(K_n) = n - 1$.

Número de Convexidade

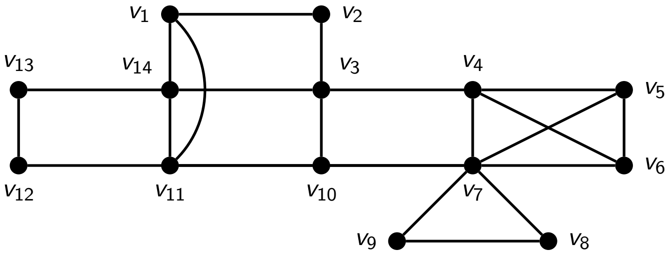
- O *número de convexidade* $\mathrm{con}(G)$ é o tamanho do maior conjunto convexo próprio do grafo G
- Nas convexidades geodésica e monofônica, temos que $\mathrm{con}(G) = n - 1$ se, e somente se, G tem vértice simplicial. Portanto, $\mathrm{con}_{\mathrm{g}}(K_n) = \mathrm{con}_{\mathrm{m}}(K_n) = n - 1$.

Número de Convexidade



- Além disso, para o grafo G_1, $\mathrm{con}_g(G_1) = \mathrm{con}_m(G_1) = 14 - 1 = 13$, pois G_1 tem vértice simplicial.

Número de Convexidade



- Além disso, para o grafo G_1, $\text{con}_g(G_1) = \text{con}_m(G_1) = 14 - 1 = 13$, pois G_1 tem vértice simplicial.

Número de Convexidade

- Na convexidade P_3, $\mathrm{con}_{\mathrm{p3}}(G) = n - 1$ se, e somente se, G tem vértice de grau 1. Portanto $\mathrm{con}_{\mathrm{p3}}(G_1) \leq 14 - 2 = 12$
- $\mathrm{con}_{\mathrm{p3}}(K_n) = 1$.
- Toda árvore T com pelo menos 2 vértices, tem o número de convexidade igual a $n - 1$ nas três convexidades

Número de Convexidade

- Na convexidade P_3, $\mathrm{con}_{\mathrm{p3}}(G) = n - 1$ se, e somente se, G tem vértice de grau 1. Portanto $\mathrm{con}_{\mathrm{p3}}(G_1) \leq 14 - 2 = 12$
- $\mathrm{con}_{\mathrm{p3}}(K_n) = 1$.
- Toda árvore T com pelo menos 2 vértices, tem o número de convexidade igual a $n - 1$ nas três convexidades

Número de Convexidade

- Na convexidade P_3, $\text{con}_{\text{p3}}(G) = n - 1$ se, e somente se, G tem vértice de grau 1. Portanto $\text{con}_{\text{p3}}(G_1) \leq 14 - 2 = 12$
- $\text{con}_{\text{p3}}(K_n) = 1$.
- Toda árvore T com pelo menos 2 vértices, tem o número de convexidade igual a $n - 1$ nas três convexidades

Número de Convexidade

- Em um ciclo C_n, $\mathrm{con}_{\mathrm{m}}(C_n) = 2$
- Na convexidade geodésica, $\mathrm{con}_{\mathrm{g}}(C_n) = \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$
- Na convexidade P_3, $\mathrm{con}_{\mathrm{p3}}(C_n) = n - 2$ se $n \geq 4$ e $\mathrm{con}_{\mathrm{p3}}(C_3) = 1$.

Número de Convexidade

- Em um ciclo C_n, $\mathrm{con}_{\mathrm{m}}(C_n) = 2$
- Na convexidade geodésica, $\mathrm{con}_{\mathrm{g}}(C_n) = \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$
- Na convexidade P_3, $\mathrm{con}_{\mathrm{p3}}(C_n) = n - 2$ se $n \geq 4$ e $\mathrm{con}_{\mathrm{p3}}(C_3) = 1$.

Número de Convexidade

- Em um ciclo C_n, $\mathrm{con_m}(C_n) = 2$
- Na convexidade geodésica, $\mathrm{con_g}(C_n) = \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$
- Na convexidade P_3, $\mathrm{con_{p3}}(C_n) = n - 2$ se $n \geq 4$ e $\mathrm{con_{p3}}(C_3) = 1$.

Tempo de Iteração

- Dado um grafo G e uma convexidade sobre G, o *tempo de iteração* de um conjunto $S \subseteq V(G)$, denotado por $\mathrm{ti}(S)$, é definido como o menor inteiro k tal que $\mathrm{I}^k(S) = \mathrm{conv}(S)$
- O *tempo de iteração* $\mathrm{ti}(G)$ é o maior valor $\mathrm{ti}(S)$ entre todos os conjuntos $S \subseteq V(G)$.

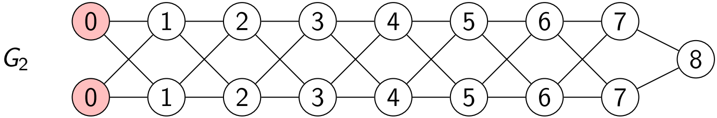
Tempo de Iteração

- Dado um grafo G e uma convexidade sobre G, o *tempo de iteração* de um conjunto $S \subseteq V(G)$, denotado por $\mathrm{ti}(S)$, é definido como o menor inteiro k tal que $\mathrm{I}^k(S) = \mathrm{conv}(S)$
- O *tempo de iteração* $\mathrm{ti}(G)$ é o maior valor $\mathrm{ti}(S)$ entre todos os conjuntos $S \subseteq V(G)$.

Número de Percolação

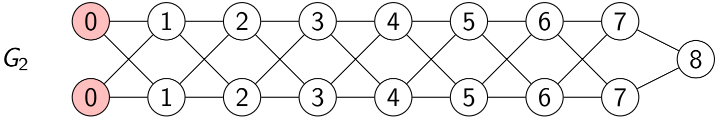
- O *tempo de percolação* $\text{tp}(G)$ é o maior valor $\text{ti}(S)$ entre todos os conjuntos $S \subseteq V(G)$ que são conjuntos de envoltória de G na convexidade considerada

Tempos de Iteração e de Percolação



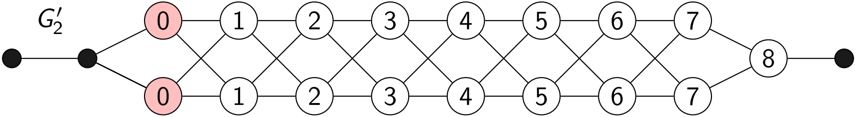
- $\text{ti}(G_2) = \text{tp}(G_2) = 8$ nas três convexidades: geodésica, monofônica e P_3

Tempos de Iteração e de Percolação



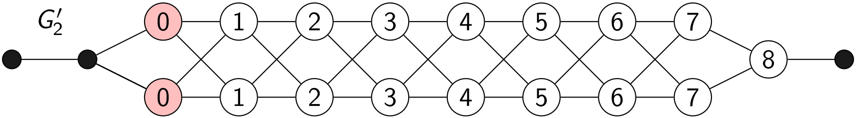
- ti(G_2) = tp(G_2) = 8 nas três convexidades: geodésica, monofônica e P_3

Tempos de Iteração e de Percolação



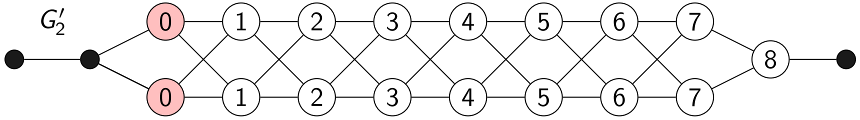
- Observe que os vértices em vermelho não formam em G_2' um conjunto de envoltória, mas continuam com o mesmo tempo de iteração 8 e, por isso, $\mathrm{ti}(G_2') = 8$ nas três convexidades: geodésica, monofônica e P_3.
- nas convexidades geodésica e monofônica, então $\mathrm{tp_m}(G_2') = \mathrm{tp_g}(G_2') = 1$
- $\mathrm{tp_{p3}}(G_2') = \mathrm{ti_{p3}}(G_2') = 8$

Tempos de Iteração e de Percolação



- Observe que os vértices em vermelho não formam em G_2' um conjunto de envoltória, mas continuam com o mesmo tempo de iteração 8 e, por isso, $\mathrm{ti}(G_2') = 8$ nas três convexidades: geodésica, monofônica e P_3.
- nas convexidades geodésica e monofônica, então $\mathrm{tp}_{\mathrm{m}}(G_2') = \mathrm{tp}_{\mathrm{g}}(G_2') = 1$
- $\mathrm{tp}_{\mathrm{p3}}(G_2') = \mathrm{ti}_{\mathrm{p3}}(G_2') = 8$

Tempos de Iteração e de Percolação



- Observe que os vértices em vermelho não formam em G_2' um conjunto de envoltória, mas continuam com o mesmo tempo de iteração 8 e, por isso, $\mathrm{ti}(G_2') = 8$ nas três convexidades: geodésica, monofônica e P_3.
- nas convexidades geodésica e monofônica, então $\mathrm{tp_m}(G_2') = \mathrm{tp_g}(G_2') = 1$
- $\mathrm{tp_{p3}}(G_2') = \mathrm{ti_{p3}}(G_2') = 8$

Tempos de Iteração e de Percolação

- $\mathrm{ti}_{\mathrm{p3}}(K_n) = \mathrm{tp}_{\mathrm{p3}}(K_n) = 1$ e, nas convexidades geodésica e monofônica, $\mathrm{ti}(K_n) = \mathrm{tp}(K_n) = 0$
- Nos nos ciclos, temos que os tempos de iteração e de percolação são iguais a 1 nas três convexidades: geodésica, monofônica e P_3.

Tempos de Iteração e de Percolação

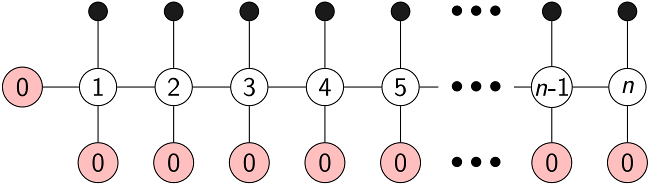
- $\mathrm{ti}_{\mathrm{p3}}(K_n) = \mathrm{tp}_{\mathrm{p3}}(K_n) = 1$ e, nas convexidades geodésica e monofônica, $\mathrm{ti}(K_n) = \mathrm{tp}(K_n) = 0$
- Nos nos ciclos, temos que os tempos de iteração e de percolação são iguais a 1 nas três convexidades: geodésica, monofônica e P_3.

Tempos de Iteração e de Percolação

- Nas árvores com mais de 2 vértices, os tempos de iteração e de percolação são iguais a 1 nas convexidades geodésica e monofônica.
- Com relação à convexidade P_3, a situação é diferente e os parâmetros podem destoar bastante. Para $n \geq 1$, uma árvore com tempo de iteração n e tempo de percolação 1.

Tempos de Iteração e de Percolação

- Nas árvores com mais de 2 vértices, os tempos de iteração e de percolação são iguais a 1 nas convexidades geodésica e monofônica.
- Com relação à convexidade P_3, a situação é diferente e os parâmetros podem destoar bastante. Para $n \geq 1$, uma árvore com tempo de iteração n e tempo de percolação 1.



Número de Posição Geral

- Um conjunto S de um grafo G está em *posição geral* na convexidade $\mathcal{C}$ se S não contém 3 elementos x, y, z tais que z está no intervalo de x e y
- O *número de posição geral* $\mathrm{gp}_{\mathcal{C}}(S)$ de G é o maior subconjunto de $V(G)$ em posição geral em $\mathcal{C}$.

Número de Posição Geral

- Um conjunto S de um grafo G está em *posição geral* na convexidade $\mathcal{C}$ se S não contém 3 elementos x, y, z tais que z está no intervalo de x e y
- O *número de posição geral* $\mathrm{gp}_{\mathcal{C}}(S)$ de G é o maior subconjunto de $V(G)$ em posição geral em $\mathcal{C}$.

Número de Posição Geral

- Seja $n \geq 4$, $\mathrm{gp}(K_n) = n$ nas convexidades geodésica e monofônica
- Na convexidade P_3, $\mathrm{gp}_{\mathrm{p3}}(K_n) = 2$,
- Nos ciclos, $\mathrm{gp}_{\mathrm{m}}(C_n) = 2$
- Com relação aos ciclos na convexidade geodésica, $\mathrm{gp}_{\mathrm{g}}(C_n) = 3$ para $n \geq 5$ e $\mathrm{gp}_{\mathrm{g}}(C_4) = 2$.
- Na convexidade P_3, $\mathrm{gp}_{\mathrm{p3}}(C_n) = \lfloor \frac{2n}{3} \rfloor$

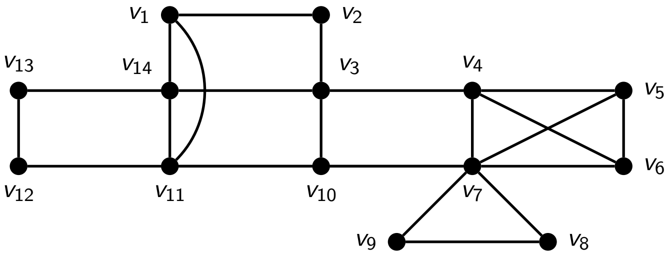
Número de Posição Geral

- Seja $n \geq 4$, $\mathrm{gp}(K_n) = n$ nas convexidades geodésica e monofônica
- Na convexidade P_3, $\mathrm{gp}_{\mathrm{p3}}(K_n) = 2$,
- Nos ciclos, $\mathrm{gp}_{\mathrm{m}}(C_n) = 2$
- Com relação aos ciclos na convexidade geodésica, $\mathrm{gp}_{\mathrm{g}}(C_n) = 3$ para $n \geq 5$ e $\mathrm{gp}_{\mathrm{g}}(C_4) = 2$.
- Na convexidade P_3, $\mathrm{gp}_{\mathrm{p3}}(C_n) = \lfloor \frac{2n}{3} \rfloor$

Número de Posição Geral

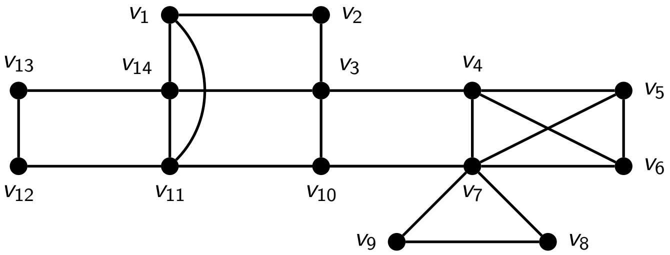
- Seja $n \geq 4$, $\mathrm{gp}(K_n) = n$ nas convexidades geodésica e monofônica
- Na convexidade P_3, $\mathrm{gp}_{\mathrm{p3}}(K_n) = 2$,
- Nos ciclos, $\mathrm{gp}_{\mathrm{m}}(C_n) = 2$
- Com relação aos ciclos na convexidade geodésica, $\mathrm{gp}_{\mathrm{g}}(C_n) = 3$ para $n \geq 5$ e $\mathrm{gp}_{\mathrm{g}}(C_4) = 2$.
- Na convexidade P_3, $\mathrm{gp}_{\mathrm{p3}}(C_n) = \lfloor \frac{2n}{3} \rfloor$

Número de Posição Geral



- Note que o conjunto $\{v_1, v_5, v_6, v_8, v_9, v_{12}, v_{13}\}$ está em posição geral na convexidade geodésica. Logo temos que $\mathrm{gp}_\mathrm{g}(G_1) \geq 7$.
- Note que o conjunto $\{v_5, v_6, v_8, v_9, v_{12}\}$ está em posição geral na convexidade monofônica, logo temos que $\mathrm{gp}_\mathrm{m}(G_1) \geq 5$.

Número de Posição Geral



- Note que o conjunto $\{v_1, v_5, v_6, v_8, v_9, v_{12}, v_{13}\}$ está em posição geral na convexidade geodésica. Logo temos que $\mathrm{gp_g}(G_1) \geq 7$.
- Note que o conjunto $\{v_5, v_6, v_8, v_9, v_{12}\}$ está em posição geral na convexidade monofônica, logo temos que $\mathrm{gp_m}(G_1) \geq 5$.

Posto

- Um subconjunto S de vértices de um grafo G está em *posição convexa* ou é *convexamente independente* se nenhum $x \in S$ pertence a $\mathrm{conv}(S \setminus \{x\})$
- O *posto* de G, denotado por $\mathrm{rk}(G)$, é definido como o tamanho do maior subconjunto convexamente independente de $V(G)$.

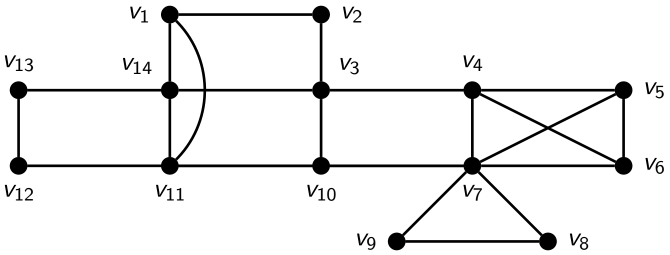
Posto

- Um subconjunto S de vértices de um grafo G está em *posição convexa* ou é *convexamente independente* se nenhum $x \in S$ pertence a $\text{conv}(S \setminus \{x\})$
- O *posto* de G, denotado por $\text{rk}(G)$, é definido como o tamanho do maior subconjunto convexamente independente de $V(G)$.

Posto

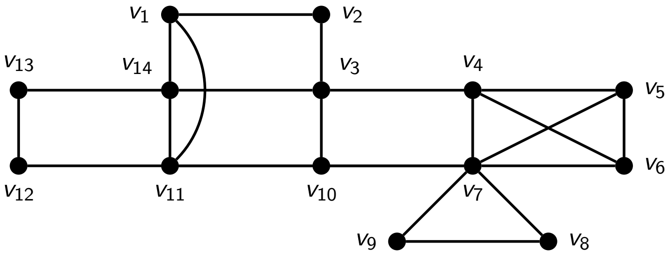
- Seja $n \geq 4$. Na convexidade monofônica, $\text{rk}_{\text{m}}(K_n) = n$ e $\text{rk}_{\text{m}}(P_n) = \text{rk}_{\text{m}}(C_n) = 2$
- Na convexidade geodésica, $\text{rk}_{\text{g}}(K_n) = n$, $\text{rk}_{\text{g}}(C_n) = 3$ para $n \geq 5$ e $\text{rk}_{\text{g}}(C_4) = 2$
- Na convexidade P_3, $\text{rk}_{\text{p3}}(K_n) = 2$ e $\text{rk}_{\text{p3}}(C_n) = \lfloor \frac{2n}{3} \rfloor$

Posto



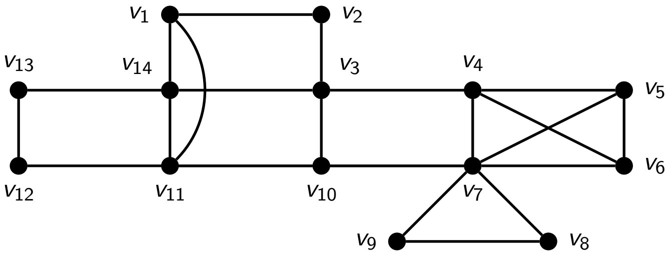
- Note que $\{v_1, v_5, v_6, v_8, v_9, v_{12}, v_{13}\}$ é convexamente independente na convexidade geodésica, logo temos que $\mathrm{rk}_g(G_1) \geq 7$.
- Note que $\{v_1, v_5, v_6, v_8, v_9\}$ é convexamente independente na convexidade monofônica, logo temos que $\mathrm{rk}_g(G_1) \geq 5$.

Posto



- Note que $\{v_1, v_5, v_6, v_8, v_9, v_{12}, v_{13}\}$ é convexamente independente na convexidade geodésica, logo temos que $\mathrm{rk_g}(G_1) \geq 7$.
- Note que $\{v_1, v_5, v_6, v_8, v_9\}$ é convexamente independente na convexidade monofônica, logo temos que $\mathrm{rk_g}(G_1) \geq 5$.

Posto



- Note que $\{v_1, v_5, v_6, v_8, v_9, v_{12}, v_{13}\}$ é convexamente independente na convexidade geodésica, logo temos que $\text{rk}_g(G_1) \geq 7$.
- Note que $\{v_1, v_5, v_6, v_8, v_9\}$ é convexamente independente na convexidade monofônica, logo temos que $\text{rk}_g(G_1) \geq 5$.

Números de Carathéodory, Radon e Helly de um grafo

- $\mathrm{cth}_{\mathcal{C}}(G)$: tam maior subc Carathéodory independente $S \subseteq V(G)$ na convexidade $\mathcal{C}$: $\bigcup_{x\in S} \mathrm{conv}_{\mathcal{C}}(S \setminus \{x\}) \quad \neq \quad \mathrm{conv}_{\mathcal{C}}(S)$.
- $\mathrm{rd}_{\mathcal{C}}(G)$: tam maior subconjunto Radon independente $S \subseteq V(G)$ na convexidade $\mathcal{C}$: $\nexists$ bipart (S_1, S_2) de S: $\mathrm{conv}_{\mathcal{C}}(S_1) \cap \mathrm{conv}_{\mathcal{C}}(S_2) \neq \emptyset$.
- $\mathrm{h}\ell_{\mathcal{C}}(G)$: tam maior subconjunto Helly independente $S \subseteq V(G)$ na convexidade $\mathcal{C}$: $\bigcap_{x\in S} \mathrm{conv}_{\mathcal{C}}(S \setminus \{x\}) \quad = \quad \emptyset$.

- Parâmetros muito estudados na literatura.
- Inspirados nos teoremas clássicos de Carathéodory, Radon e Helly.
- [Coelho, Dourado, Sampaio, 2015] e [Dourado, da Silva, 2017] provaram que, além de serem NP–difíceis, são altamente inaproximáveis nas convexidades P_3 e geodésica.
- Ou seja, não possuem algoritmo polinomial com fator de aproximação $n^{1-\varepsilon}$ para nenhum $\varepsilon > 0$, a menos que P=NP.

Número de Carathéodory $\mathrm{cth}(G)$

- $\mathrm{cth}_{\mathcal{C}}(G)$: tam maior subc Carathéodory independente $S \subseteq V(G)$ na convexidade $\mathcal{C}$: $\bigcup_{x \in S} \mathrm{conv}_{\mathcal{C}}(S \setminus \{x\}) \neq \mathrm{conv}_{\mathcal{C}}(S)$.
- **Exemplo Convexidade P_3:** conjunto C das folhas de uma árvore binária completa B. O intervalo $\mathrm{I}_{\mathrm{p3}}(\cdot)$, começando por C, gera um nível de B por vez, até a raiz r. Ou seja, $r \in \mathrm{conv}_{\mathrm{p3}}(C)$, mas $r \notin \bigcup_{u \in C} \mathrm{conv}_{\mathrm{p3}}(C \setminus \{u\})$: todas as folhas são necessárias para gerar a raiz. Assim $\mathrm{cth}_{\mathrm{p3}}(B) = \mathrm{hn}_{\mathrm{p3}}(B)$ é o número de folhas de B.
- **Exemplo Convexidade geodésica:** Grafo B_u adicionando vértice universal u a B. O intervalo $\mathrm{I}_{\mathrm{g}}(\cdot)$ em B_u, começando por C (folhas), é quase igual ao em B na convexidade P_3, com a raiz r gerada por último. A diferença é que u será gerado na primeira iteração, mas, como é universal, u não ajuda a gerar outros vértices na convexidade geodésica. Assim $\mathrm{cth}_{\mathrm{g}}(B_u) = \mathrm{hn}_{\mathrm{g}}(B_u)$ é o número de folhas de B.

Número de Carathéodory $\mathrm{cth}(G)$

- $\mathrm{cth}_{\mathcal{C}}(G)$: tam maior subc Carathéodory independente $S \subseteq V(G)$ na convexidade $\mathcal{C}$: $\bigcup_{x \in S} \mathrm{conv}_{\mathcal{C}}(S \setminus \{x\}) \neq \mathrm{conv}_{\mathcal{C}}(S)$.
- Seja $n \geq 4$.
- **Grafo completo K_n:** $\mathrm{cth}_{\mathrm{g}}(K_n) = \mathrm{cth}_{\mathrm{m}}(K_n) = 1$ e $\mathrm{cth}_{\mathrm{p3}}(K_n) = 2$.
- **Grafo caminho P_n:** $\mathrm{cth}_{\mathrm{g}}(P_n) = \mathrm{cth}_{\mathrm{m}}(P_n) = \mathrm{cth}_{\mathrm{p3}}(P_n) = 2$.
- **Grafo ciclo C_n:** $\mathrm{cth}_{\mathrm{g}}(C_n) = \mathrm{cth}_{\mathrm{m}}(C_n) = \mathrm{cth}_{\mathrm{p3}}(C_n) = 2$.

Número de Radon rd(G)

- $\mathrm{rd}_{\mathcal{C}}(G)$: tam maior subconjunto Radon independente $S \subseteq V(G)$ na convexidade $\mathcal{C}$: $\nexists$ bipart (S_1, S_2) de S: $\mathrm{conv}_{\mathcal{C}}(S_1) \cap \mathrm{conv}_{\mathcal{C}}(S_2) \neq \emptyset$.
- Seja $n \geq 4$.
- **Grafo completo K_n:** $\mathrm{rd_g}(K_n) = \mathrm{rd_m}(K_n) = n$ e $\mathrm{rd_{p3}}(K_n) = 2$.
- **Grafo caminho P_n:** $\mathrm{rd_g}(P_n) = \mathrm{rd_m}(P_n) = 2$ e $\mathrm{rd_{p3}}(P_n) = \lceil 2n/3 \rceil$.
- **Grafo ciclo C_n:** $\mathrm{rd_m}(C_n) = 2$, $\mathrm{rd_g}(C_n) = 3$ se $n \geq 5$, $\mathrm{rd_g}(C_4) = 2$ e $\mathrm{rd_{p3}}(C_n) = \lfloor 2n/3 \rfloor$.
- **Árvore completamente binária B na convexidade P_3:** $\mathrm{rd_{p3}}(B)$ é o número de folhas, pois qualquer partição das folhas gera subárvores separadas.

Número de Helly $h\ell(G)$

- $h\ell_{\mathcal{C}}(G)$: tam maior subconjunto Helly independente $S \subseteq V(G)$ na convexidade $\mathcal{C}$: $\bigcap_{x\in S} \mathrm{conv}_{\mathcal{C}}(S \setminus \{x\}) = \emptyset$.

Teorema [Duchet'88]: $h\ell_m(G) = \omega(G)$ para todo grafo G. Conseq, $h\ell_g(G) = \omega(G)$ para todo grafo G distância hereditária, como árvores ($h\ell_g(T) = 2$).

- Seja $n \geq 4$.
- **Grafo completo K_n:** $h\ell_g(K_n) = h\ell_m(K_n) = n$ e $h\ell_{p3}(K_n) = 2$.
- **Grafo caminho P_n:** $h\ell_g(P_n) = h\ell_m(P_n) = 2$ e $h\ell_{p3}(P_n) =$???.
- **Grafo ciclo C_n:** $h\ell_m(C_n) = 2$ e $h\ell_g(C_n) = 3$ para $n \geq 5$ e $h\ell_g(C_4) = 2$.

Desigualdades entre os parâmetros

Teorema: Para todo grafo G e toda convexidade sobre G,

- $\text{in}(G) \;\geq\; \text{hn}(G) \;\geq\; |\text{Ext}(G)|$
- $\text{ti}(G) \;\geq\; \text{tp}(G)$ e $\text{gp}(G) \;\geq\; \text{rk}(G)$

Teorema: Para todo grafo G com pelo menos 2 vértices e toda convexidade sobre G tal que $\{v\}$ é convexo para todo $v \in V(G)$,

- $\text{h}\ell(G) \;\geq\; 2$ e $\text{rk}(G) \;\geq\; \text{rd}(G)$

Prova: $|S| = 2$ é Helly independente, pois cada vértice sozinho é convexo. Se S é convexamente dependente, existe $v \in \text{conv}(S \setminus \{v\})$ e portanto S é Radon dependente devido à partição $\{v\}$ e $S \setminus \{v\}$.

Teorema [Levi'1951]: $\text{rd}(G) \geq \text{h}\ell(G)$ para todo G e toda convexidade.

Teorema [Eckhoff–Jamison'1976]: Para todo G e toda convexidade,

$$\text{cth}(G) \;\geq\; \frac{\text{rd}(G) - 1}{\text{h}\ell(G) - 1} \qquad \text{se } \text{h}\ell(G) \geq 2.$$

Capítulo 9

Aplicações de Convexidade em Grafos

Seção 9.1

Modelos de Difusão em Grafos

Seção 9.1 - Modelos de Difusão em Grafos

Convexidade TSS

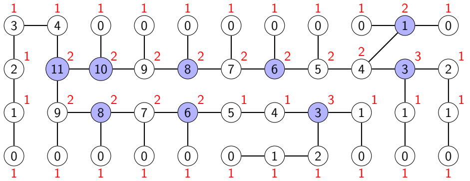
- Função limiar $\tau : V(G) \to \mathbb{N}$.
- Convexidade TSS (Target Set Selection): cada vértice v tem um limiar $\tau(v)$ próprio de vizinhos necessários para sua ativação.
- Convexidade P_3: $\tau(v) = 2$ para todo vértice v.
- Função $\mathrm{I}_\tau(S)$ contém S mais todo vértice v fora de S que tem pelo menos $\tau(v)$ vizinhos em S.
- A função I_τ é de intervalo **se e só se** $\tau(v) > 0 \ \ \forall v \in V(G)$.
- Majority thresholds: $\tau(v) = \lceil d(v)/2 \rceil$, em que $d(v)$ é o grau de v
- r-neighbor bootstrap percolation: $\tau(v) = r$ para todo v.
- [Holroyd 2003]: Conjunto inicial escolhido aleatoriamente.
- [Kempe, Kleinberg e Tardos 2003]: limiares aleatórios em certa faixa

- Nos próximos slides, vamos assumir que $\tau(v) \leq d(v)$ para todo v.

Algoritmo TSS-size-tree

- Algoritmo TSS-size-tree (árvore T, função limiar τ)

considere T como árvore enraizada em um vértice r de grau $d(r) \geq 2$
seja $\tau'(v) = \tau(v)$ para todo vértice v de T
seja $x(f) = 0$ para toda folha f de T
enquanto há vértice v com $x(v)$ não definido, *faça*
    seja u um vértice cujos filhos têm $x(\cdot)$ definido e *seja* w o pai de u
    se $\tau'(u) \geq 2$, *então*
        $x(u) \leftarrow 1$; $\tau'(w) \leftarrow \tau'(w) - 1$
    senão
        $x(u) \leftarrow 0$
        se $\tau'(u) \leq 0$, *então:* $\tau'(w) \leftarrow \tau'(w) - 1$
retorne os vértices v com $x(v) = 1$



Algoritmo TSS-time-tree

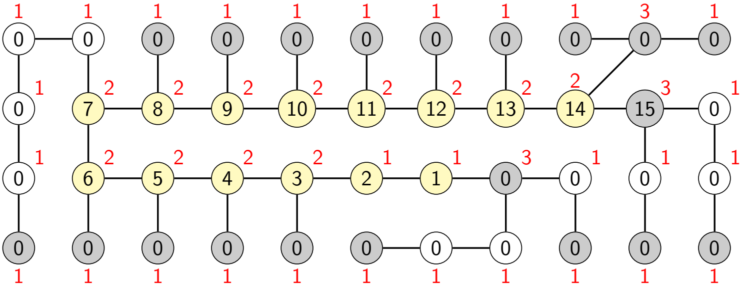


Figure: Árvore com tempo de percolação 15. Limiares em vermelho, vértices saturados em cinza e caminho máximo de não saturados em amarelo. Números nos vértices são tempos de ativação. Tempo 0 representa o conjunto alvo, que contém 29 vértices.

Seção 9.2

Jogos de Convexidade em Grafos

- [Harary, 1984]: Definiu os primeiros jogos de convexidade.

Jogos de Convexidade

Dado G e uma convexidade, introduzimos 4 jogos. Em todos, o conjunto L de vértices rotulados começa vazio e $f(L)$ e $g(L)$ dependem do jogo. Alice e Bob alternadamente rotulam um vértice não-rotulado v que não está em $f(L)$. O jogo termina quando $g(L) = V(G)$.

- No jogo da envoltória: $f(L) = L$ e $g(L) = \mathrm{conv}_{\mathcal{C}}(L)$.
- No jogo do intervalo: $f(L) = L$ e $g(L) = \mathrm{I}_{\mathcal{C}}(L)$.
- No jogo da envoltória fechada: $f(L) = g(L) = \mathrm{conv}_{\mathcal{C}}(L)$.
- No jogo do intervalo fechado: $f(L) = g(L) = \mathrm{I}_{\mathcal{C}}(L)$.

Variante normal: último a jogar vence.
Variante pobre (*misère*): último a jogar perde.
Variante de otimização: Alice vence se num vértices rotulados $\leq k$.

- *número do jogo da envoltória* $\mathrm{ghn}_{\mathcal{C}}(G)$,
- *número do jogo do intervalo* $\mathrm{gin}_{\mathcal{C}}(G)$,
- *número do jogo fechado da envoltória* $\mathrm{cghn}_{\mathcal{C}}(G)$,
- *número do jogo fechado do intervalo* $\mathrm{cgin}_{\mathcal{C}}(G)$.

Jogos de Convexidade

Teorema: Dado um grafo G com n vértices e uma convexidade sobre G,

- $\mathrm{hn}_{\mathcal{C}}(G) \leq \mathrm{cghn}_{\mathcal{C}}(G) \leq \mathrm{ghn}_{\mathcal{C}}(G) \leq \min\left\{ 2 \cdot \mathrm{hn}_{\mathcal{C}}(G) - 1,\ n \right\}$,
- $\mathrm{in}_{\mathcal{C}}(G) \leq \mathrm{cgin}_{\mathcal{C}}(G) \leq \mathrm{gin}_{\mathcal{C}}(G) \leq \min\left\{ 2 \cdot \mathrm{in}_{\mathcal{C}}(G) - 1,\ n \right\}$,

Exemplo na convexidade P_3: K_n no limite inferior. Em ciclos:

- **Limite superior:** $\mathrm{hn}_{\mathrm{p3}}(C_4) = 2$, $\mathrm{cghn}_{\mathrm{p3}}(C_4) = \mathrm{ghn}_{\mathrm{p3}}(C_4) = 3$, $\mathrm{hn}_{\mathrm{p3}}(C_6) = 3$, $\mathrm{cghn}_{\mathrm{p3}}(C_6) = 4$ e $\mathrm{ghn}_{\mathrm{p3}}(C_6) = 5$.
- **Limite inferior:** $\mathrm{hn}_{\mathrm{p3}}(C_5) = \mathrm{cghn}_{\mathrm{p3}}(C_5) = \mathrm{ghn}_{\mathrm{p3}}(C_5) = 3$.
- **No meio:** $\mathrm{hn}_{\mathrm{p3}}(C_7) = 4$ e $\mathrm{cghn}_{\mathrm{p3}}(C_7) = \mathrm{ghn}_{\mathrm{p3}}(C_7) = 5 < 7$.

Teorema: Jogos da envoltória nas variantes normal e pobre são PSPACE-completos.

FIM DA AULA 02

Perguntas (se houver tempo) ??

Introdução à Convexidade em Grafos
Aula 03

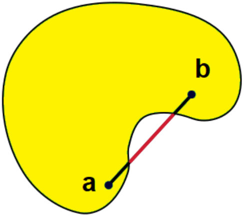
Júlio Araújo, Mitre Dourado,
Fábio Protti, Rudini Sampaio

34^{o} CBM – Julho de 2023

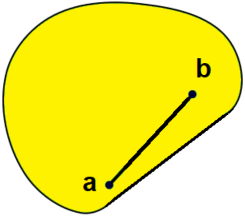
Rio de Janeiro, quarta, 26-Julho, 8h

Capítulo 4: Convexidades Geométricas

Um conjunto S no plano é um conjunto convexo se nenhum ponto fora de S está em um segmento de reta com extremidades em S.



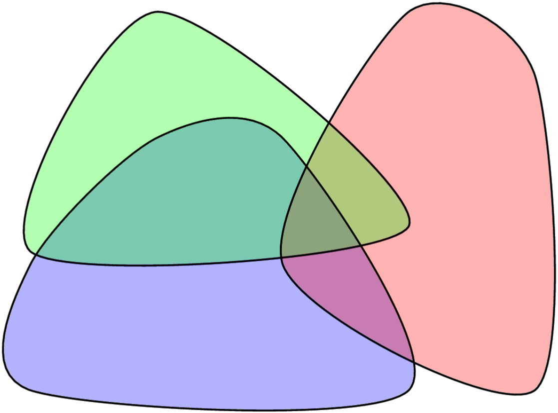
não convexo



convexo

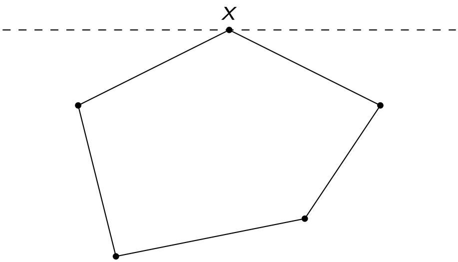
A família de conjuntos convexos é fechada sob interseção

Se S_1 e S_2 são convexos então $S_1 \cap S_2$ também é convexo.



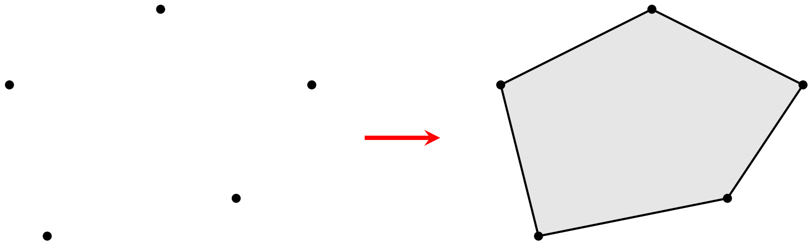
Pontos extremos

Um ponto x é um ponto extremo de S se nenhum segmento de reta com extremidades em $S \setminus \{x\}$ contém x como ponto interno.



Fecho convexo

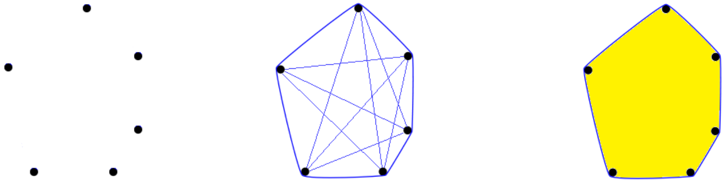
O fecho convexo de um conjunto de pontos A no plano é o menor conjunto convexo que contém A.



Inicie com um conjunto de pontos A,

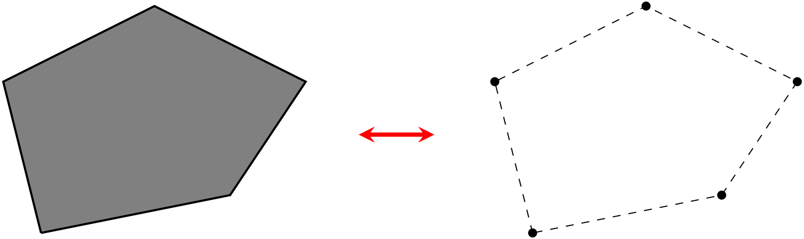
- faça $H = A$,
- adicione a H os pontos que estão em um segmento de reta entre dois pontos de H,
- e repita até que nenhum novo ponto possa ser adicionado (isto é, H é convexo).

Esse processo é a convexificação de A.



conjunto de pontos (esquerda), adição de segmentos (centro), fecho convexo (direita)

Todo conjunto convexo é o fecho convexo de seus pontos extremos.



Definição de Convexidade

Uma convexidade sobre um conjunto não vazio V é uma família $\mathscr{C}$ de subconjuntos de V (chamados conjuntos convexos) em que:

- $\emptyset$ e V são conjuntos convexos;
- a interseção de conjuntos convexos é um conjunto convexo.

Convexidade de Grafo

Se $V = V(G)$ para algum grafo G então $\mathscr{C}$ é uma convexidade de grafo de G.

Seguindo as mesmas definições...

Sejam G um grafo e $\mathscr{C}$ uma convexidade de G.

- Dado um conjunto $S \subseteq V(G)$, o menor conjunto $S' \in \mathscr{C}$ contendo S é o fecho convexo de S.
  Notação: $S' = \text{conv}(S)$
- Um vértice x de um conjunto convexo $S \in \mathscr{C}$ é um vértice extremo de S se $S \backslash \{x\}$ é também convexo.
  Notação: $\text{Ext}(S)$ = conjunto de vértices extremos de S
- $\mathscr{C}$ é uma convexidade geométrica (ou geometria convexa) se satisfaz a Propriedade de *Minkowski-Krein-Milman*:
  todo conjunto convexo $S \in \mathscr{C}$ satisfaz $S = \text{conv}(\text{Ext}(S))$.

Intervalo: o análogo combinatório de segmento de reta

Seja $\mathscr{P}_G$ uma coleção de passeios de G (p.ex., a coleção de todos os caminhos mínimos de G).

- O intervalo $I(u, v)$ de $u, v \in V(G)$ é o conjunto de todos os vértices que estão em um passeio de $\mathscr{P}_G$ de u a v.
- Para $S \subseteq V(G)$, defina $I(S) = \cup_{u,v \in S} I(u, v)$.

Construção iterativa do fecho convexo usando intervalos

Inicie com um conjunto de vértices $S \subseteq V(G)$.

- Faça $S_0 = S$
- Calcule $S_{i+1} = I(S_i), i = 0, 1, 2, \ldots$
- Como G é finito, existe k tal que $S_{k+1} = S_k$
- Neste ponto, temos $\mathrm{conv}(S) = S_k$
- –> O processo produzirá no final um conjunto convexo

Exemplo

- Seja $\mathscr{P}_G$ a coleção de todos os caminhos mínimos de G

Exemplo

- Seja $\mathscr{P}_G$ a coleção de todos os caminhos mínimos de G
- $I(S) = S \cup \{x : x$ está em um caminho mínimo entre vértices de $S\}$

Convexidade de grafo via operador de intervalo

Exemplo

- Seja $\mathscr{P}_G$ a coleção de todos os caminhos mínimos de G
- $I(S) = S \cup \{x : x$ está em um caminho mínimo entre vértices de $S\}$
- Um conjunto S é convexo se nenhum $x \notin S$ está em um caminho mínimo entre dois vértices de S

Exemplo

- Seja $\mathscr{P}_G$ a coleção de todos os caminhos mínimos de G
- $I(S) = S \cup \{x : x \text{ está em um caminho mínimo entre vértices de } S\}$
- Um conjunto S é convexo se nenhum $x \notin S$ está em um caminho mínimo entre dois vértices de S
- Em outras palavras: S é convexo $\Leftrightarrow I(S) = S$

Exemplo

- Seja $\mathscr{P}_G$ a coleção de todos os caminhos mínimos de G
- $I(S) = S \cup \{x : x$ está em um caminho mínimo entre vértices de $S\}$
- Um conjunto S é convexo se nenhum $x \notin S$ está em um caminho mínimo entre dois vértices de S
- Em outras palavras: S é convexo $\Leftrightarrow I(S) = S$
- Seja $\mathscr{C} = \{S \subseteq V(G) \mid I(S) = S\}$

Exemplo

- Seja $\mathscr{P}_G$ a coleção de todos os caminhos mínimos de G
- $I(S) = S \cup \{x : x$ está em um caminho mínimo entre vértices de $S\}$
- Um conjunto S é convexo se nenhum $x \notin S$ está em um caminho mínimo entre dois vértices de S
- Em outras palavras: S é convexo $\Leftrightarrow I(S) = S$
- Seja $\mathscr{C} = \{S \subseteq V(G) \mid I(S) = S\}$
- $\mathscr{C}$ é uma convexidade de G !

Convexidade de grafo via operador de intervalo

Exemplo

- Seja $\mathscr{P}_G$ a coleção de todos os caminhos mínimos de G
- $I(S) = S \cup \{x : x$ está em um caminho mínimo entre vértices de $S\}$
- Um conjunto S é convexo se nenhum $x \notin S$ está em um caminho mínimo entre dois vértices de S
- Em outras palavras: S é convexo $\Leftrightarrow I(S) = S$
- Seja $\mathscr{C} = \{S \subseteq V(G) \mid I(S) = S\}$
- $\mathscr{C}$ é uma convexidade de G !
- Mais precisamente, $\mathscr{C}$ é a *convexidade geodésica* de G

Exemplo

- Seja $\mathscr{P}_G$ a coleção de todos os caminhos mínimos de G
- $I(S) = S \cup \{x : x$ está em um caminho mínimo entre vértices de $S\}$
- Um conjunto S é convexo se nenhum $x \notin S$ está em um caminho mínimo entre dois vértices de S
- Em outras palavras: S é convexo $\Leftrightarrow I(S) = S$
- Seja $\mathscr{C} = \{S \subseteq V(G) \mid I(S) = S\}$
- $\mathscr{C}$ é uma convexidade de G !
- Mais precisamente, $\mathscr{C}$ é a *convexidade geodésica* de G
- Mas: $\mathscr{C}$ não é necessariamente uma convexidade geométrica

Exemplo

- Seja $\mathscr{P}_G$ a coleção de todos os caminhos mínimos de G
- $I(S) = S \cup \{x : x \text{ está em um caminho mínimo entre vértices de } S\}$
- Um conjunto S é convexo se nenhum $x \notin S$ está em um caminho mínimo entre dois vértices de S
- Em outras palavras: S é convexo $\Leftrightarrow I(S) = S$
- Seja $\mathscr{C} = \{S \subseteq V(G) \mid I(S) = S\}$
- $\mathscr{C}$ é uma convexidade de G !
- Mais precisamente, $\mathscr{C}$ é a *convexidade geodésica* de G
- Mas: $\mathscr{C}$ não é necessariamente uma convexidade geométrica

Questão: caracterize os grafos G para os quais a convexidade geodésica de G é geométrica

Definindo convexidades via sistemas de caminhos

- Convexidade geodésica –> caminhos mínimos
- Convexidade monofônica –> caminhos induzidos
- Convexidade P_3 –> caminhos com 3 vértices
- Convexidade P_3^* –> caminhos induzidos com 3 vértices
- Convexidade m^3 –> caminhos induzidos com 3 ou mais arestas
- Convexidade l^k –> caminhos induzidos com k ou menos arestas
- Convexidade de pedágio –> passeios com pedágio
- Convexidade de pedágio fraco –> passeios com pedágio fraco
- etc.

A principal questão

- Fixe uma regra r para definir os conjuntos convexos (p.ex., uma regra baseada em algum sistema de caminhos)
- Determine a classe de grafos cujas r-convexidades são geométricas

A principal questão

- Fixe uma regra r para definir os conjuntos convexos (p.ex., uma regra baseada em algum sistema de caminhos)
- Determine a classe de grafos cujas r-convexidades são geométricas

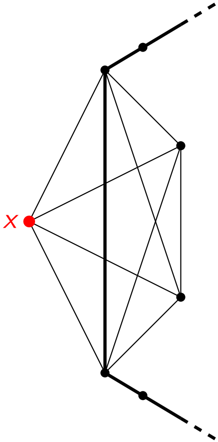
Exemplo

Um grafo G é cordal se e somente se
a convexidade monofônica de G é geométrica.

Convexidade monofônica

- $I(S) = S \cup \{x : x \text{ está em um caminho induzido entre vértices de } S\}$
- S é monofonicamente convexo se $I(S) = S$
- $\mathscr{C} = \{S \subseteq V(G) \mid I(S) = S\}$
- $\mathscr{C}$ é a convexidade monofônica de G
- $\mathrm{Ext}(S)$ é o conjunto de vértices simpliciais de $G[S]$

Nenhum caminho induzido atravessa um vértice simplicial.



Convexidade monofônica e cordalidade

Teo: G é cordal $\Leftrightarrow$ a convexidade monofônica de G é geométrica

Prova

$(\Leftarrow)$

Teo: G é cordal $\Leftrightarrow$ a convexidade monofônica de G é geométrica

Prova

$(\Leftarrow)$

- Suponha que G contém um ciclo induzido C com pelo menos 4 vértices

Teo: G é cordal $\Leftrightarrow$ a convexidade monofônica de G é geométrica

Prova

($\Leftarrow$)

- Suponha que G contém um ciclo induzido C com pelo menos 4 vértices
- É claro que $S = \text{conv}(V(C))$ é convexo

Teo: G é cordal $\Leftrightarrow$ a convexidade monofônica de G é geométrica

Prova

($\Leftarrow$)

- Suponha que G contém um ciclo induzido C com pelo menos 4 vértices
- É claro que $S = \text{conv}(V(C))$ é convexo
- Além disso, S não contém vértices simpliciais !

Teo: G é cordal $\Leftrightarrow$ a convexidade monofônica de G é geométrica

Prova

($\Leftarrow$)

- Suponha que G contém um ciclo induzido C com pelo menos 4 vértices
- É claro que $S = \text{conv}(V(C))$ é convexo
- Além disso, S não contém vértices simpliciais !
- Isso significa que $\text{Ext}(S) = \emptyset$, i.e., $S \neq \text{conv}(\text{Ext}(S))$

Teo: G é cordal $\Leftrightarrow$ a convexidade monofônica de G é geométrica

Prova

$(\Leftarrow)$

- Suponha que G contém um ciclo induzido C com pelo menos 4 vértices
- É claro que $S = \text{conv}(V(C))$ é convexo
- Além disso, S não contém vértices simpliciais !
- Isso significa que $\text{Ext}(S) = \emptyset$, i.e., $S \neq \text{conv}(\text{Ext}(S))$
- Ou seja, a Propriedade de Minkowski-Krein-Milman falha ! $\perp$

Convexidade monofônica e cordalidade

Teo: G é cordal $\Leftrightarrow$ a convexidade monofônica de G é geométrica

Prova

$(\Rightarrow)$

Teo: G é cordal $\Leftrightarrow$ a convexidade monofônica de G é geométrica

Prova

$(\Rightarrow)$

- Assuma que $G = (V, E)$ é cordal

Teo: G é cordal $\Leftrightarrow$ a convexidade monofônica de G é geométrica

Prova

$(\Rightarrow)$

- Assuma que $G = (V, E)$ é cordal
- Então, todo vértice não simplicial de G está em um caminho induzido entre dois vértices simpliciais

Teo: G é cordal $\Leftrightarrow$ a convexidade monofônica de G é geométrica

Prova

$(\Rightarrow)$

- Assuma que $G = (V, E)$ é cordal
- Então, todo vértice não simplicial de G está em um caminho induzido entre dois vértices simpliciais
- Isso significa que $V = I(\text{Ext}(V)) = \text{conv}(\text{Ext}(V))$

Teo: G é cordal $\Leftrightarrow$ a convexidade monofônica de G é geométrica

Prova

$(\Rightarrow)$

- Assuma que $G = (V, E)$ é cordal
- Então, todo vértice não simplicial de G está em um caminho induzido entre dois vértices simpliciais
- Isso significa que $V = I(\text{Ext}(V)) = \text{conv}(\text{Ext}(V))$
- Mas a cordalidade é uma propriedade hereditária

Teo: G é cordal $\Leftrightarrow$ a convexidade monofônica de G é geométrica

Prova

($\Rightarrow$)

- Assuma que $G = (V, E)$ é cordal
- Então, todo vértice não simplicial de G está em um caminho induzido entre dois vértices simpliciais
- Isso significa que $V = I(\mathrm{Ext}(V)) = \mathrm{conv}(\mathrm{Ext}(V))$
- Mas a cordalidade é uma propriedade hereditária
- Logo, todo conjunto convexo $S \subseteq V$ induz um grafo cordal...

Convexidade monofônica e cordalidade

Teo: G é cordal $\Leftrightarrow$ a convexidade monofônica de G é geométrica

Prova

($\Rightarrow$)

- Assuma que $G = (V, E)$ é cordal
- Então, todo vértice não simplicial de G está em um caminho induzido entre dois vértices simpliciais
- Isso significa que $V = I(\text{Ext}(V)) = \text{conv}(\text{Ext}(V))$
- Mas a cordalidade é uma propriedade hereditária
- Logo, todo conjunto convexo $S \subseteq V$ induz um grafo cordal...
- ... e é tal que $S = \text{conv}(\text{Ext}(S))$

Convexidade monofônica e cordalidade

Teo: G é cordal $\Leftrightarrow$ a convexidade monofônica de G é geométrica

Prova

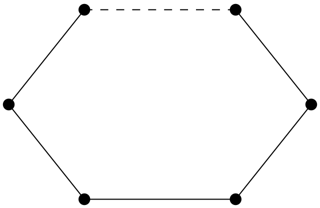
$(\Rightarrow)$

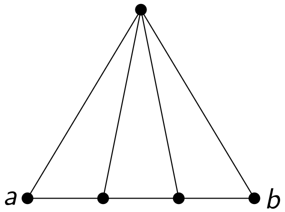
- Assuma que $G = (V, E)$ é cordal
- Então, todo vértice não simplicial de G está em um caminho induzido entre dois vértices simpliciais
- Isso significa que $V = I(\text{Ext}(V)) = \text{conv}(\text{Ext}(V))$
- Mas a cordalidade é uma propriedade hereditária
- Logo, todo conjunto convexo $S \subseteq V$ induz um grafo cordal...
- ... e é tal que $S = \text{conv}(\text{Ext}(S))$
- Portanto, a convexidade monofônica de G é geométrica ✓

Convexidade geodésica

- $I(S) = S \cup \{x : x$ está em um caminho mínimo entre vértices de $S\}$
- S é geodesicamente convexo se $I(S) = S$
- $\mathscr{C} = \{S \subseteq V(G) \mid I(S) = S\}$
- $\mathscr{C}$ é a convexidade geodésica de G
- $\mathrm{Ext}(S)$ é o conjunto de vértices simpliciais de $G[S]$

Um grafo G é Ptolemaico sss G é cordal e livre de gema.





Obstruções para grafos Ptolemaicos: C_k $(k \geq 4)$ e gema.

Teo: G é Ptolemaico $\Leftrightarrow$ a convexidade geodésica de G é geométrica

Prova

$(\Leftarrow)$

Teo: G é Ptolemaico $\Leftrightarrow$ a convexidade geodésica de G é geométrica

Prova

$(\Leftarrow)$

- Como já visto, G não contém C_k com $k \geq 4$

Teo: G é Ptolemaico $\Leftrightarrow$ a convexidade geodésica de G é geométrica

Prova

$(\Leftarrow)$

- Como já visto, G não contém C_k com $k \geq 4$
- Suponha agora que G contém uma gema G'

Teo: G é Ptolemaico $\Leftrightarrow$ a convexidade geodésica de G é geométrica

Prova

($\Leftarrow$)

- Como já visto, G não contém C_k com $k \geq 4$
- Suponha agora que G contém uma gema G'
- Os vértices extremos de $S = \text{conv}(V(G'))$ estão em $\{a, b\}$

Teo: G é Ptolemaico $\Leftrightarrow$ a convexidade geodésica de G é geométrica

Prova

$(\Leftarrow)$

- Como já visto, G não contém C_k com $k \geq 4$
- Suponha agora que G contém uma gema G'
- Os vértices extremos de $S = \text{conv}(V(G'))$ estão em $\{a, b\}$
- Contudo, $\text{conv}(\{a, b\}) \neq S$

Teo: G é Ptolemaico $\Leftrightarrow$ a convexidade geodésica de G é geométrica

Prova

$(\Leftarrow)$

- Como já visto, G não contém C_k com $k \geq 4$
- Suponha agora que G contém uma gema G'
- Os vértices extremos de $S = \text{conv}(V(G'))$ estão em $\{a, b\}$
- Contudo, $\text{conv}(\{a, b\}) \neq S$
- Isto é, a Propriedade de Minkowski-Krein-Milman falha ! $\perp$

Teo: G é Ptolemaico $\Leftrightarrow$ a convexidade geodésica de G é geométrica

Prova

$(\Rightarrow)$

Teo: G é Ptolemaico $\Leftrightarrow$ a convexidade geodésica de G é geométrica

Prova

$(\Rightarrow)$

- Assuma que $G = (V, E)$ é Ptolemaico

Teo: G é Ptolemaico $\Leftrightarrow$ a convexidade geodésica de G é geométrica

Prova

($\Rightarrow$)

- Assuma que $G = (V, E)$ é Ptolemaico
- Então, todo caminho induzido de G é mínimo

Teo: G é Ptolemaico $\Leftrightarrow$ a convexidade geodésica de G é geométrica

Prova

($\Rightarrow$)

- Assuma que $G = (V, E)$ é Ptolemaico
- Então, todo caminho induzido de G é mínimo
- Como G é cordal, todo vértice não simplicial de G está em um caminho induzido (mínimo !) entre dois vértices simpliciais

Teo: G é Ptolemaico $\Leftrightarrow$ a convexidade geodésica de G é geométrica

Prova

$(\Rightarrow)$

- Assuma que $G = (V, E)$ é Ptolemaico
- Então, todo caminho induzido de G é mínimo
- Como G é cordal, todo vértice não simplicial de G está em um caminho induzido (mínimo !) entre dois vértices simpliciais
- Isso significa que $V = I(\text{Ext}(V)) = \text{conv}(\text{Ext}(V))$

Teo: G é Ptolemaico $\Leftrightarrow$ a convexidade geodésica de G é geométrica

Prova

$(\Rightarrow)$

- Assuma que $G = (V, E)$ é Ptolemaico
- Então, todo caminho induzido de G é mínimo
- Como G é cordal, todo vértice não simplicial de G está em um caminho induzido (mínimo !) entre dois vértices simpliciais
- Isso significa que $V = I(\mathrm{Ext}(V)) = \mathrm{conv}(\mathrm{Ext}(V))$
- Mas a classe de grafos Ptolemaicos é hereditéria

Teo: G é Ptolemaico $\Leftrightarrow$ a convexidade geodésica de G é geométrica

Prova

$(\Rightarrow)$

- Assuma que $G = (V, E)$ é Ptolemaico
- Então, todo caminho induzido de G é mínimo
- Como G é cordal, todo vértice não simplicial de G está em um caminho induzido (mínimo !) entre dois vértices simpliciais
- Isso significa que $V = I(\text{Ext}(V)) = \text{conv}(\text{Ext}(V))$
- Mas a classe de grafos Ptolemaicos é hereditária
- Logo, todo conjunto convexo $S \subseteq V$ induz um grafo Ptolemaico...

Convexidade geodésica e grafos Ptolemaicos

Teo: G é Ptolemaico $\Leftrightarrow$ a convexidade geodésica de G é geométrica

Prova

($\Rightarrow$)

- Assuma que $G = (V, E)$ é Ptolemaico
- Então, todo caminho induzido de G é mínimo
- Como G é cordal, todo vértice não simplicial de G está em um caminho induzido (mínimo !) entre dois vértices simpliciais
- Isso significa que $V = I(\text{Ext}(V)) = \text{conv}(\text{Ext}(V))$
- Mas a classe de grafos Ptolemaicos é hereditéria
- Logo, todo conjunto convexo $S \subseteq V$ induz um grafo Ptolemaico...
- ... e é tal que $S = \text{conv}(\text{Ext}(S))$

Convexidade geodésica e grafos Ptolemaicos

Teo: G é Ptolemaico $\Leftrightarrow$ a convexidade geodésica de G é geométrica

Prova

($\Rightarrow$)

- Assuma que $G = (V, E)$ é Ptolemaico
- Então, todo caminho induzido de G é mínimo
- Como G é cordal, todo vértice não simplicial de G está em um caminho induzido (mínimo !) entre dois vértices simpliciais
- Isso significa que $V = I(\text{Ext}(V)) = \text{conv}(\text{Ext}(V))$
- Mas a classe de grafos Ptolemaicos é hereditária
- Logo, todo conjunto convexo $S \subseteq V$ induz um grafo Ptolemaico...
- ... e é tal que $S = \text{conv}(\text{Ext}(S))$
- Portanto, a convexidade geodésica de G é geométrica ✓

Uma receita para provar mais resultados

- Escolha uma classe $\mathcal{G}$ de grafos $\mathcal{F}$-livres, p/ alguma família $\mathcal{F}$
- Considere uma regra r para a definição de conjuntos convexos (baseada em um sistema de caminhos)
- Considere a correspondente r-convexidade
- Caracterize os vértices extremos de acordo com r e $\mathcal{G}$
- Tente provar: $G \in \mathcal{G} \Leftrightarrow$ a r-convexidade de G é geométrica
- Para a prova de $(\Leftarrow)$, mostre que todo grafo induzido $G' \in \mathcal{F}$ satisfaz $S = \text{conv}(V(G')) \neq \text{conv}(\text{Ext}(S))$
- Para a prova de $(\Rightarrow)$, mostre que todo vértice do grafo está em um r-caminho entre dois vértices extremos

Aplicando a receita

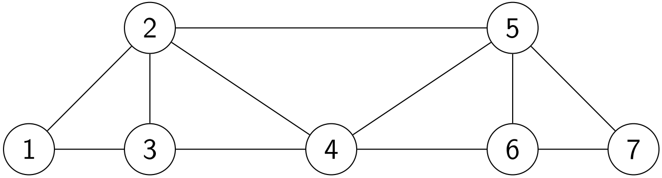
G é $\mathcal{F}$-livre $\Leftrightarrow$ a r-convexidade de G é geométrica

grafos $\mathcal{F}$-livres	r-convexidade	referência
cordal	monofônica	Farber e Jamison 1986
Ptolemaico	geodésica	Farber e Jamison 1986
fortemente cordal	forte	Farber e Jamison 1986
acíclico	*triangle path*	Dourado, Gutierrez, P., Sampaio, Tondato 2023
floresta de estrelas	P_3	Dourado, Gutierrez, P., Sampaio, Tondato 2023
bipolarizados fracos	m^3	Dragan, Nicolai, Brestädt 1999
intervalo próprio	*weakly toll*	Dourado, Gutierrez, P., Tondato 2023
cografo cordal	l^2	Gutierrez, Tondato, P. 2023
intervalo	*toll*	Alcón, Brešar, Gologranc, Gutierrez, Kraner Šumenjak, Peterin, Tepeh 2015

Um exemplo de classe não hereditária

A convexidade l^3 de um grafo

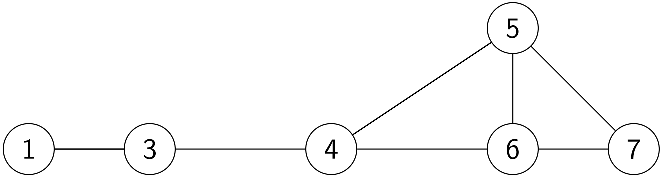
- $\mathrm{Ext}(V(G)) = \{1, 7\}$
- A convexidade l^3 de G é geométrica. Porém...
- ...para $x \in \{2, 5\}$, a convexidade l^3 de $G - x$ não é geométrica:
  - $V(G - x)$ é trivialmente um conjunto l^3-convexo de $G - x$
  - $\mathrm{Ext}(V(G - x)) = \{1, 7\}$
  - $\mathrm{conv}(\{1, 7\}) = \{1, 7\} \neq V(G - x)$



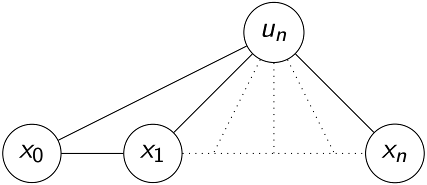
Um exemplo de classe não hereditária

A convexidade l^3 de um grafo

- $\text{Ext}(V(G)) = \{1, 7\}$
- A convexidade l^3 de G é geométrica. Porém...
- ...para $x \in \{2, 5\}$, a convexidade l^3 de $G - x$ não é geométrica:
  - $V(G - x)$ é trivialmente um conjunto l^3-convexo de $G - x$
  - $\text{Ext}(V(G - x)) = \{1, 7\}$
  - $\text{conv}(\{1, 7\}) = \{1, 7\} \neq V(G - x)$



Seja $G_n (n \geq 4)$ uma n-gema com vértices $x_0, \ldots, x_n, u_n$ (veja a figura), e assuma que G_n é um subgrafo induzido de G. Dizemos que G_n é *protegida* se existe em G um P_4 conectando x_0 e x_n que evita u_n.



n-gem

A convexidade I^3 de um grafo

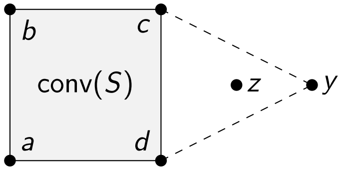
Teo: A convexidade I^3 de G é geométrica se e somente se as seguintes condições são satisfeitas:

- G é cordal;
- $\text{diam}(G) \leq 3$;
- toda n-gema induzida ($n \geq 4$) de G é protegida.

A convexidade $\mathscr{C}$ é geométrica sss o seguinte axioma é válido:

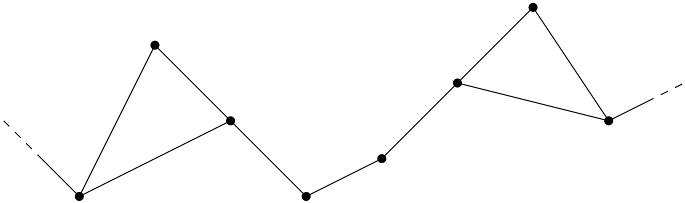
Propriedade Antitroca

Se $y, z \notin \text{conv}(S)$ e $z \in \text{conv}(S \cup \{y\})$ então $y \notin \text{conv}(S \cup \{z\})$.



$$S = \{a, b, c, d\}$$

A convexidade de caminhos triangulares de um grafo G é definida sobre a coleção de caminhos triangulares de G



Teo: G é acíclico $\Leftrightarrow$ a convexidade de caminhos triangulares de G é geométrica

Prova

$(\Leftarrow)$

Teo: G é acíclico $\Leftrightarrow$ a convexidade de caminhos triangulares de G é geométrica

Prova

($\Leftarrow$)

- Assuma que a convexidade de caminhos triangulares de G é geométrica

Teo: G é acíclico $\Leftrightarrow$ a convexidade de caminhos triangulares de G é geométrica

Prova

($\Leftarrow$)

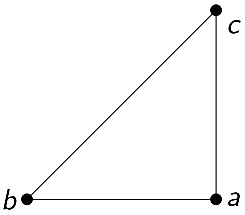
- Assuma que a convexidade de caminhos triangulares de G é geométrica
- Assuma que G contém um triângulo abc

Teo: G é acíclico $\Leftrightarrow$ a convexidade de caminhos triangulares de G é geométrica

Prova

$(\Leftarrow)$

- Assuma que a convexidade de caminhos triangulares de G é geométrica
- Assuma que G contém um triângulo abc
- Então, $\{c\}$ é um conjunto convexo, $a \in \text{conv}(\{b, c\})$ e $b \in \text{conv}(\{a, c\})$ (contradiz a propriedade antitroca)



Convexidade de caminhos triangulares e grafos acíclicos

Teo: G é acíclico $\Leftrightarrow$ a convexidade de caminhos triangulares de G é geométrica

Prova

$(\Leftarrow)$

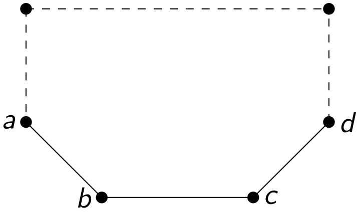
- Assuma que a convexidade de caminhos triangulares de G é geométrica e G contém um ciclo induzido $abcd\ldots$

Teo: G é acíclico $\Leftrightarrow$ a convexidade de caminhos triangulares de G é geométrica

Prova

($\Leftarrow$)

- Assuma que a convexidade de caminhos triangulares de G é geométrica e G contém um ciclo induzido $abcd\ldots$
- Então, $\{b, c\}$ é convexo, $a \in \text{conv}(\{b, c, d\})$ e $d \in \text{conv}(\{b, c, a\})$
- contradiz a propriedade antitroca –> G é livre de C_k, $k \geq 3$ ✓



Teo: G é acíclico $\Leftrightarrow$ a convexidade de caminhos triangulares de G é geométrica

Prova

$(\Rightarrow)$

Teo: G é acíclico $\Leftrightarrow$ a convexidade de caminhos triangulares de G é geométrica

Prova

$(\Rightarrow)$

- Assuma que $G = (V, E)$ é acíclico

Teo: G é acíclico $\Leftrightarrow$ a convexidade de caminhos triangulares de G é geométrica

Prova

$(\Rightarrow)$

- Assuma que $G = (V, E)$ é acíclico
- Então, todo vértice de G está em um caminho triangular entre duas folhas

Teo: G é acíclico $\Leftrightarrow$ a convexidade de caminhos triangulares de G é geométrica

Prova

($\Rightarrow$)

- Assuma que $G = (V, E)$ é acíclico
- Então, todo vértice de G está em um caminho triangular entre duas folhas
- Isso significa que $V = \text{conv}(\text{Ext}(V))$

Teo: G é acíclico $\Leftrightarrow$ a convexidade de caminhos triangulares de G é geométrica

Prova

$(\Rightarrow)$

- Assuma que $G = (V, E)$ é acíclico
- Então, todo vértice de G está em um caminho triangular entre duas folhas
- Isso significa que $V = \text{conv}(\text{Ext}(V))$
- Como grafos acíclicos são hereditários ...
- ...a convexidade de caminhos triangulares de G é geométrica $\checkmark$

Uma questão

Investigar convexidades geométricas não definidas sobre sistemas de caminhos

Capítulo 5: Convexidades P_3 e P_3^*

Definição das convexidades P_3 e P_3^*

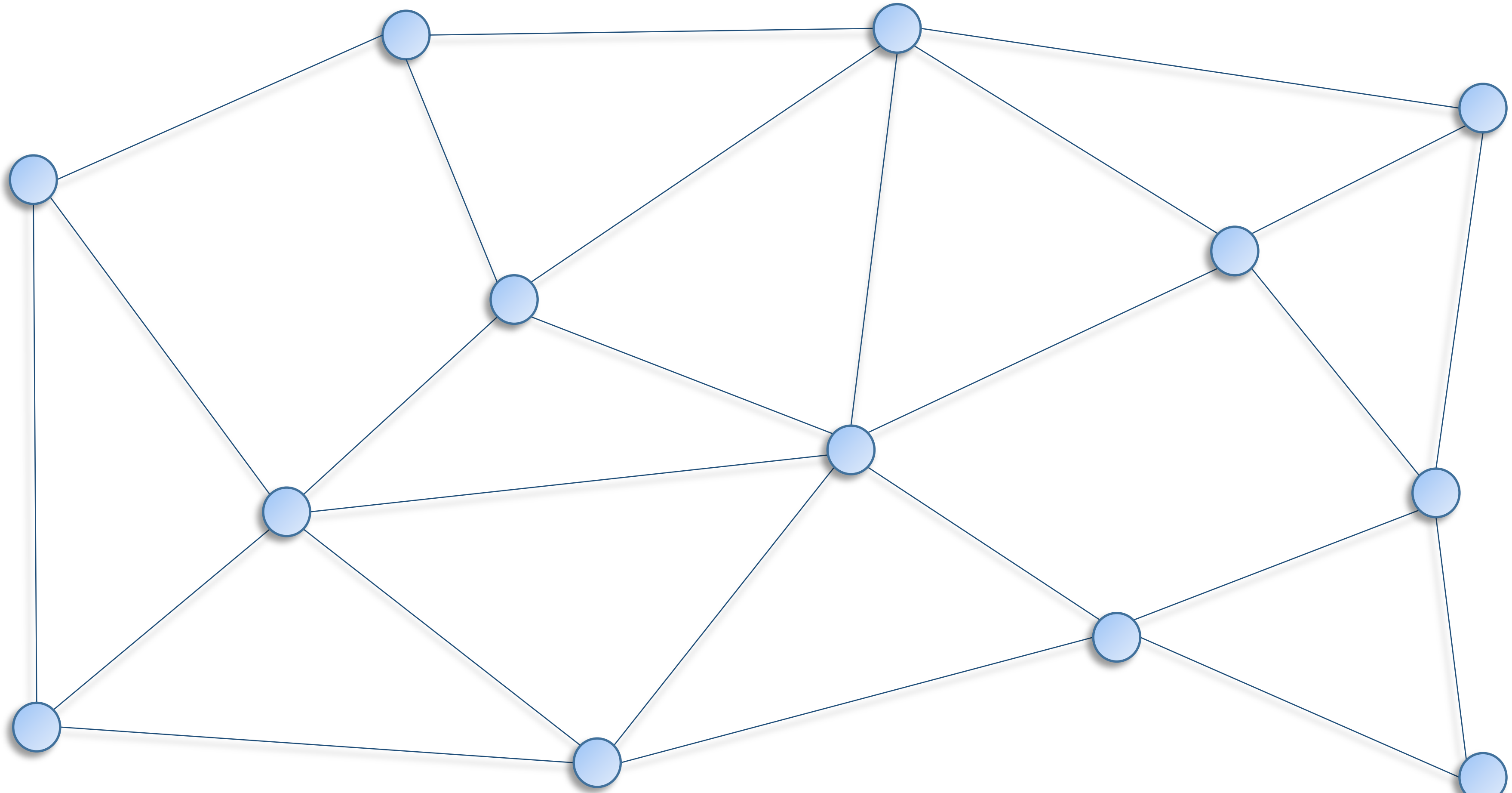
Convexidade P_3

É a convexidade definida por caminhos com três vértices.

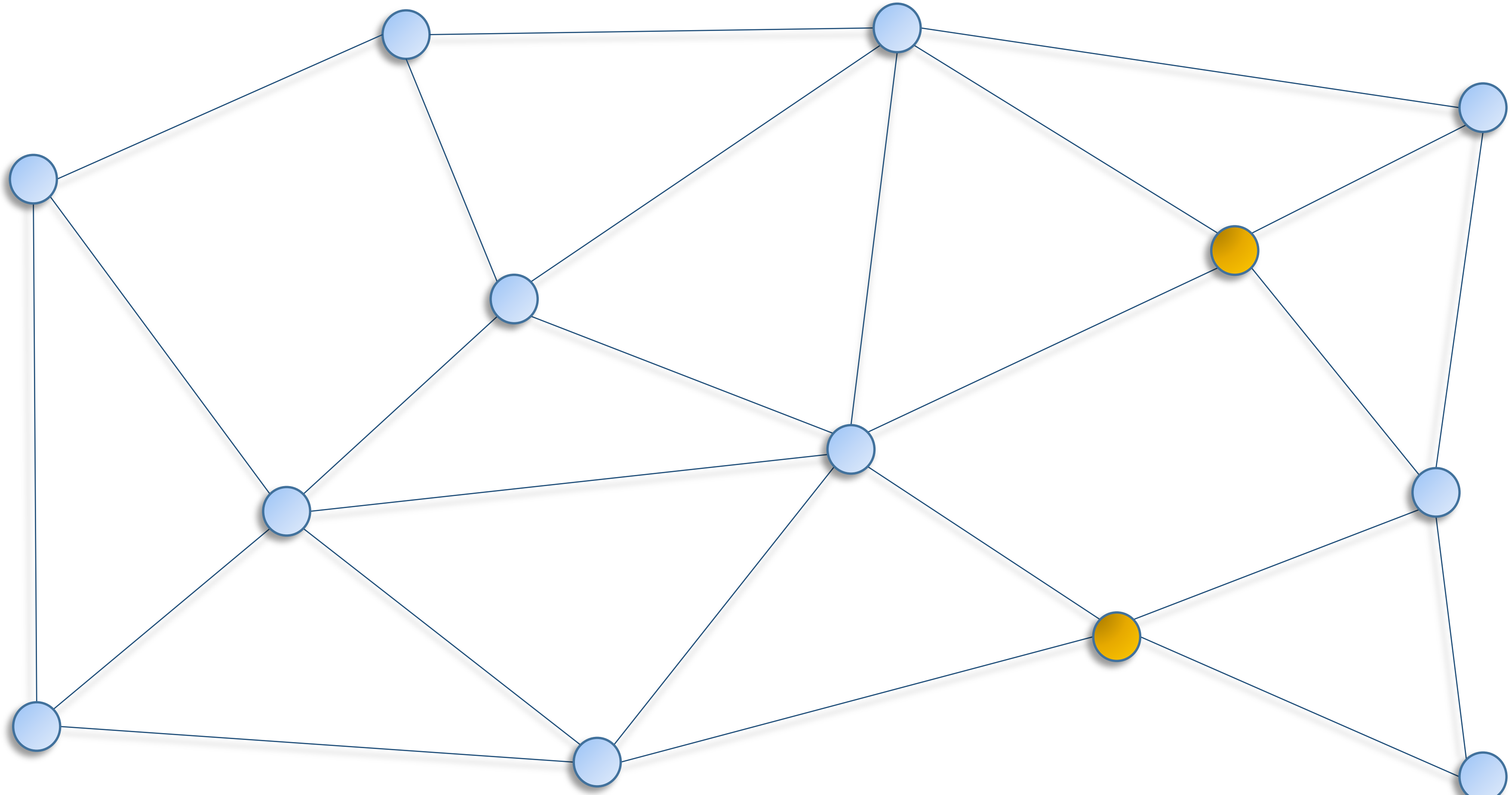
Convexidade P_3^*

É a convexidade definida por caminhos induzidos com três vértices.

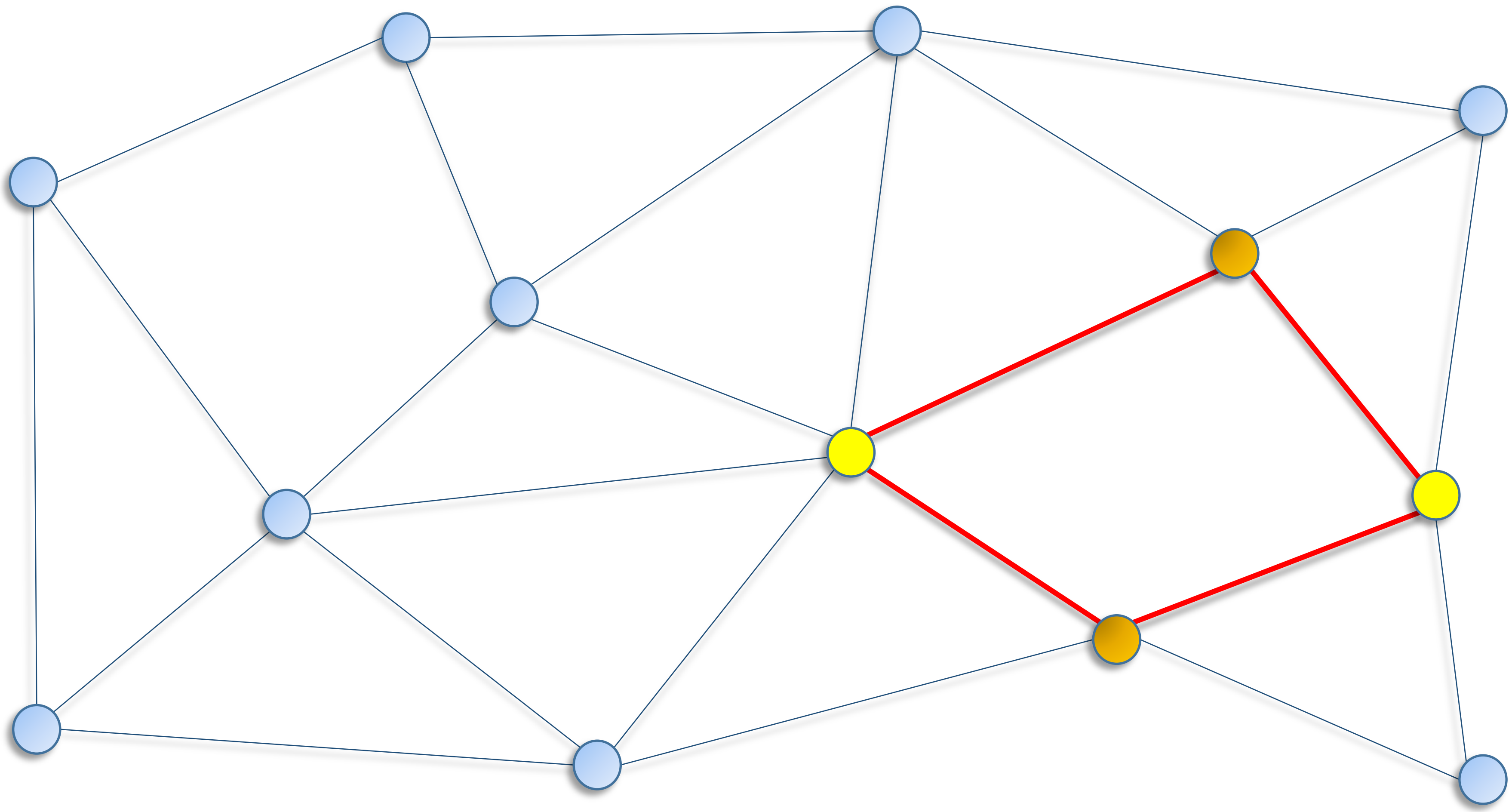
Rede social modelada por um grafo



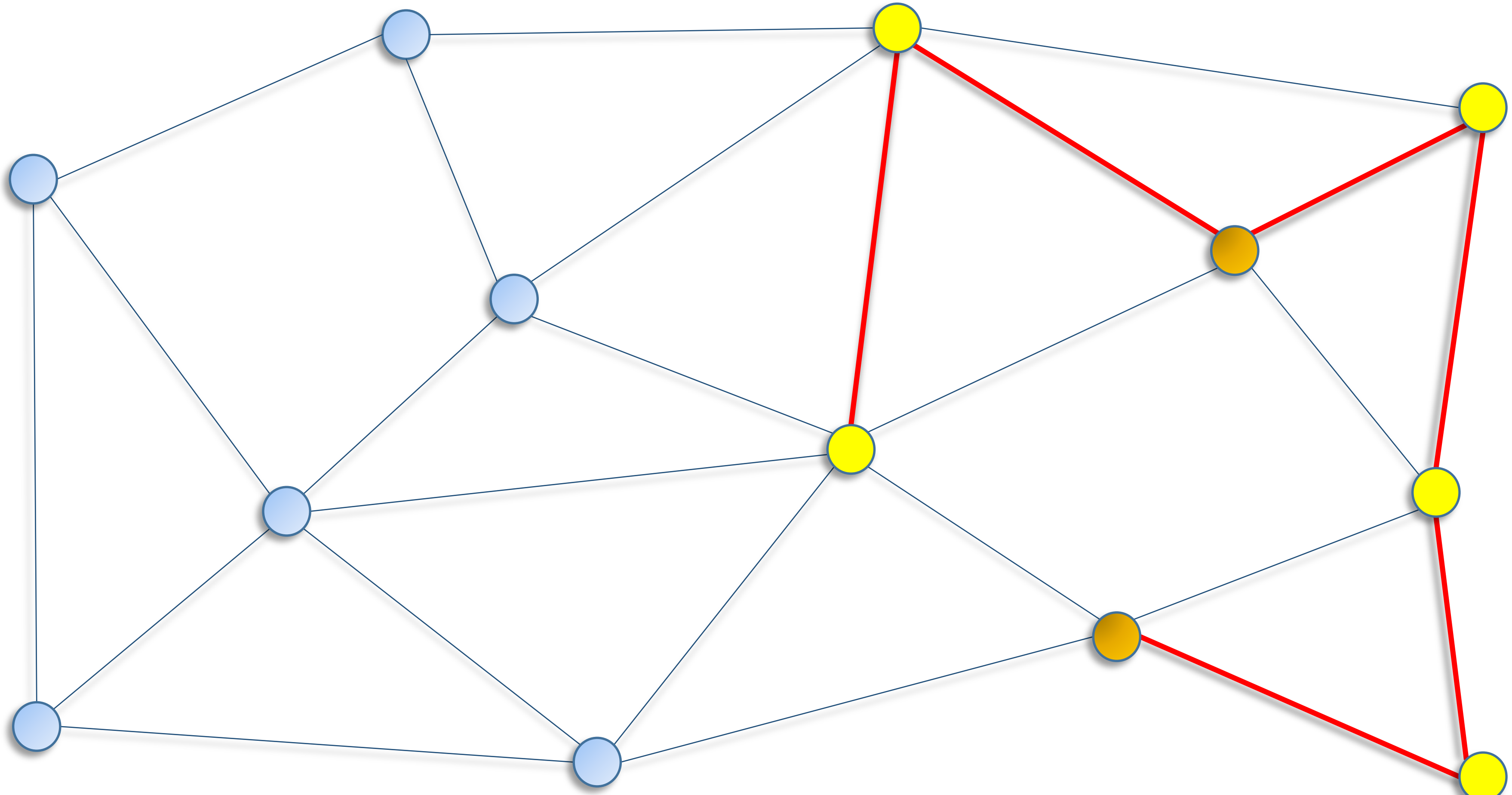
Disseminação de opinião:
uma aplicação da convexidade P_3



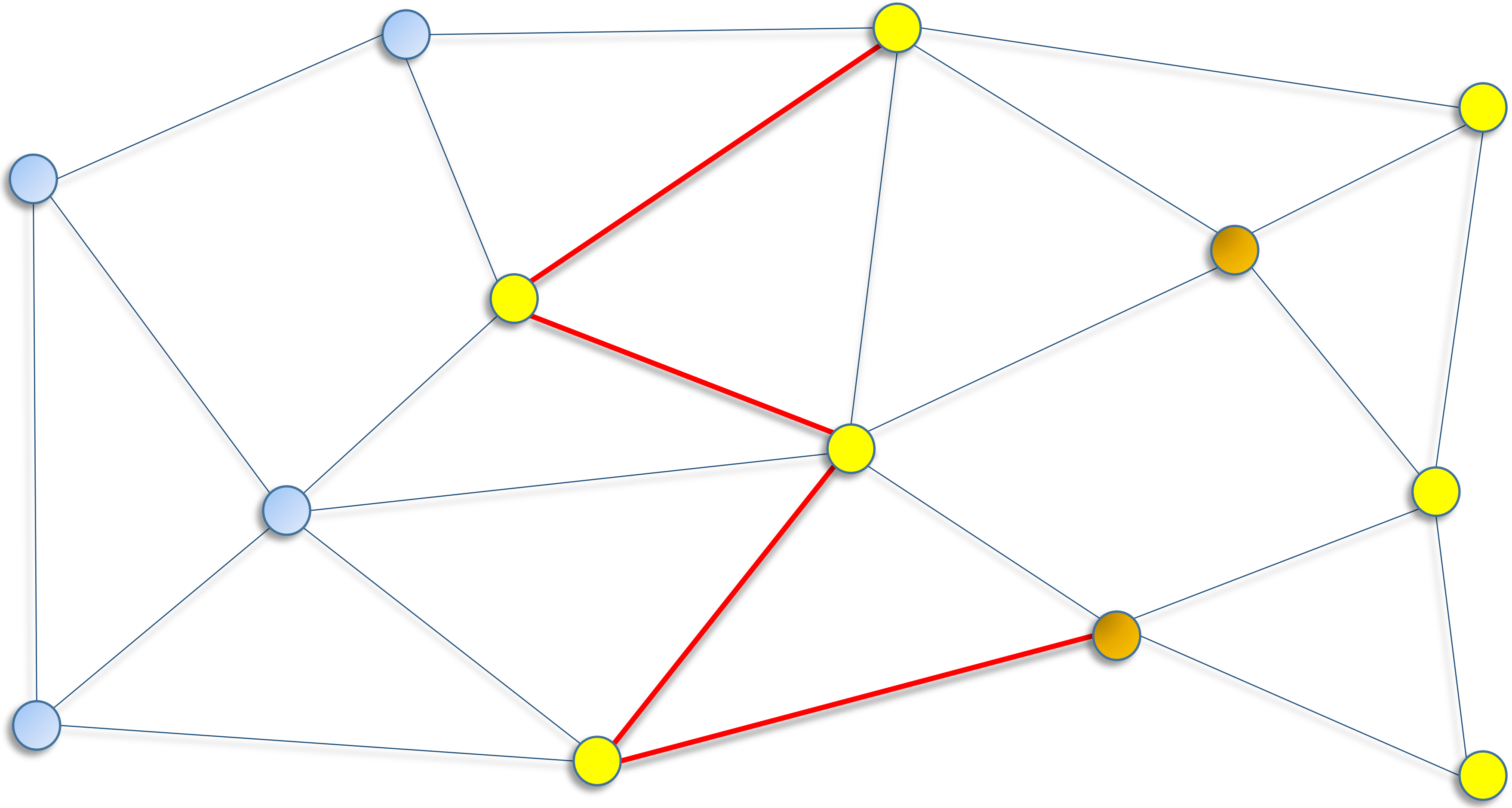
Disseminação de opinião: uma aplicação da convexidade P_3



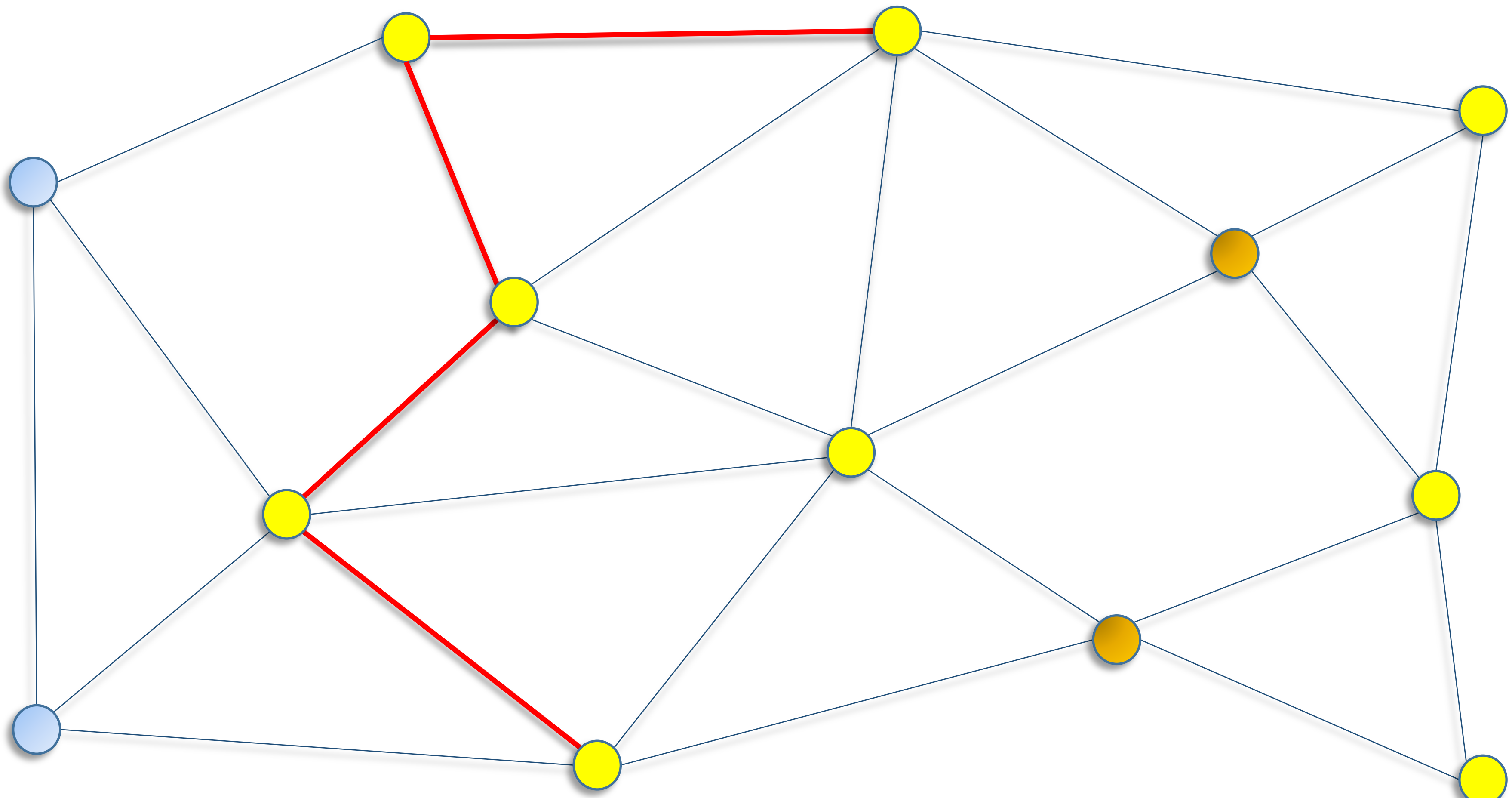
Disseminação de opinião: uma aplicação da convexidade P_3



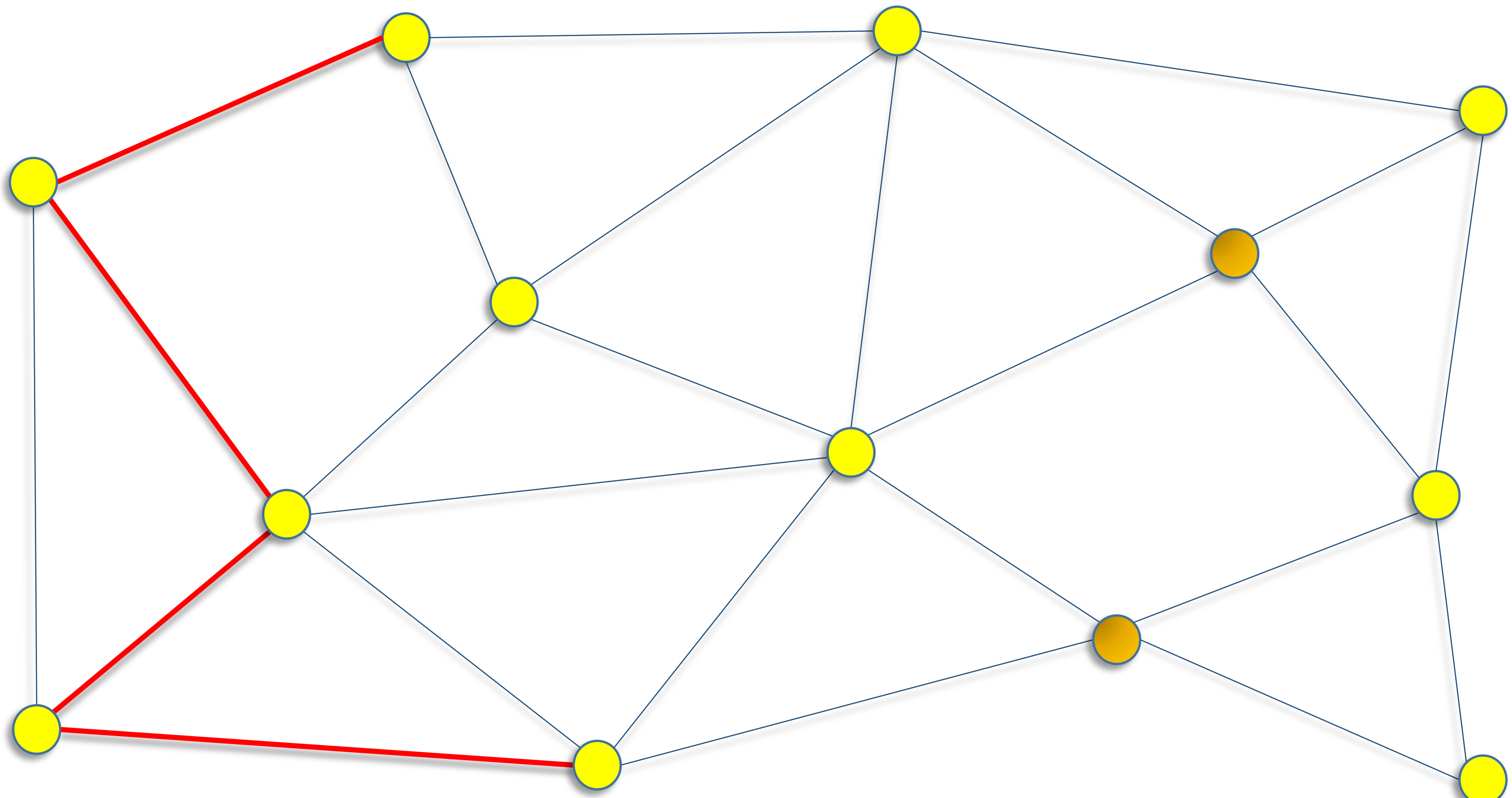
Disseminação de opinião: uma aplicação da convexidade P_3



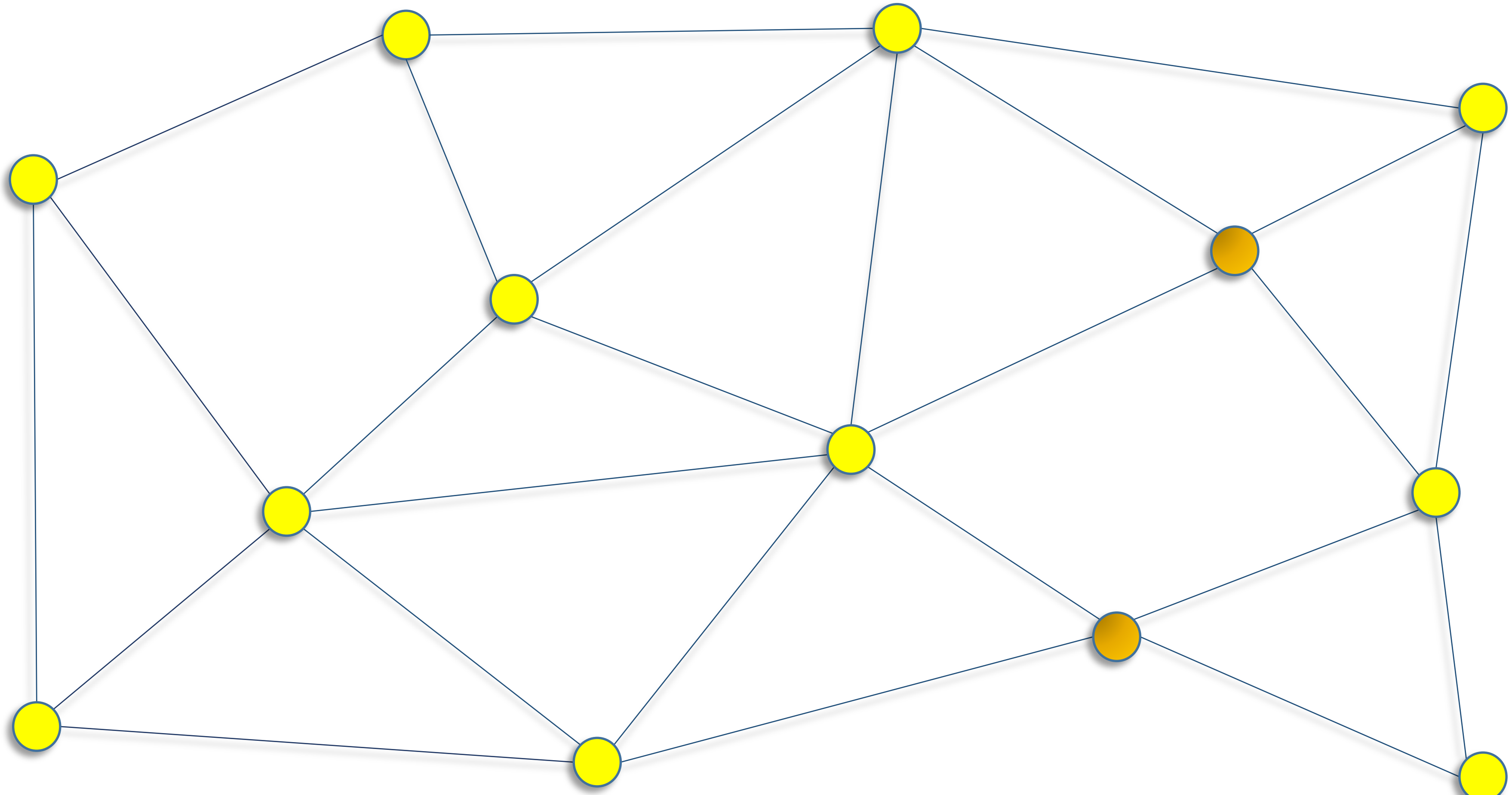
Disseminação de opinião: uma aplicação da convexidade P_3



Disseminação de opinião: uma aplicação da convexidade P_3

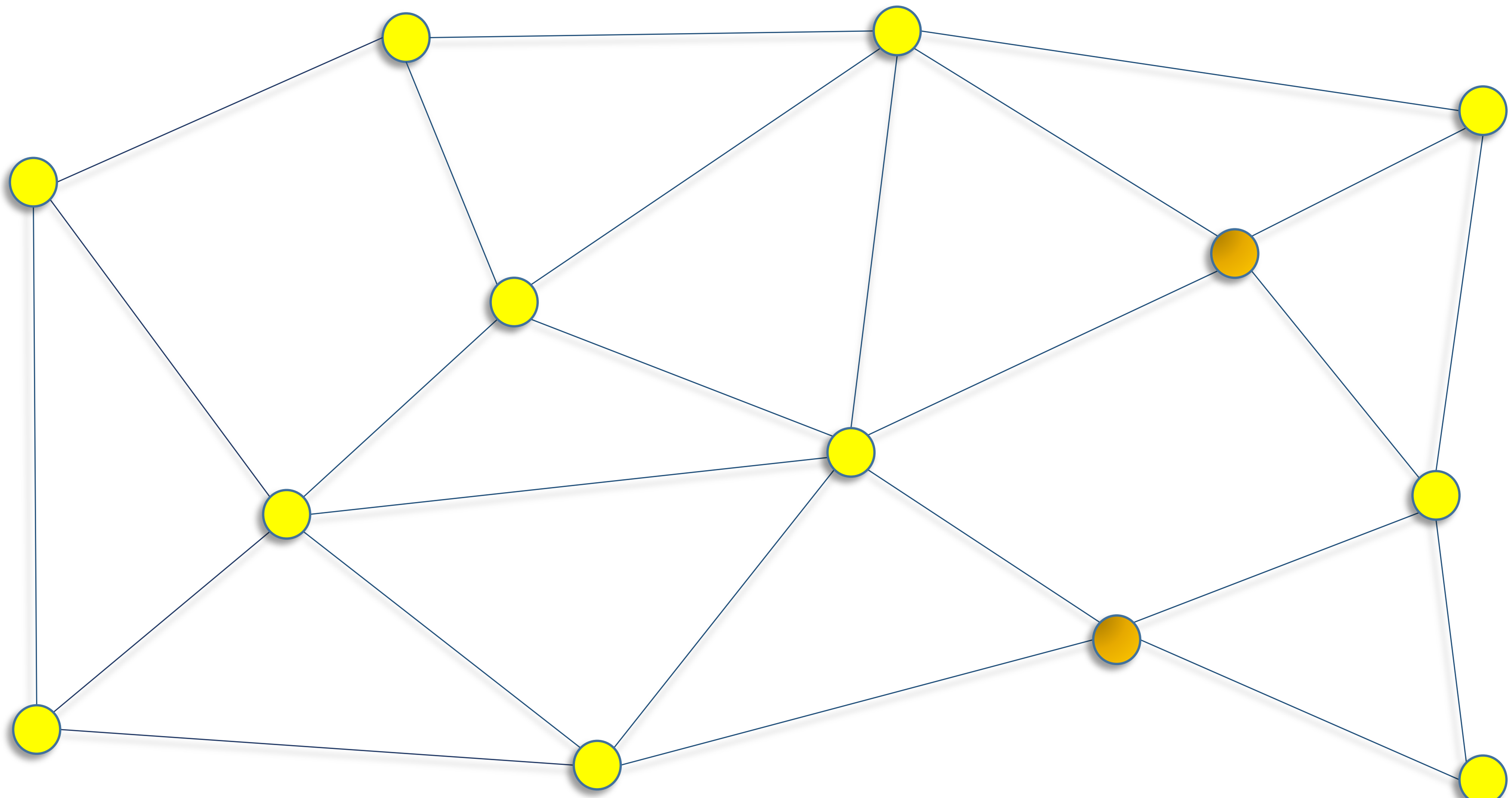


Disseminação de opinião: uma aplicação da convexidade P_3

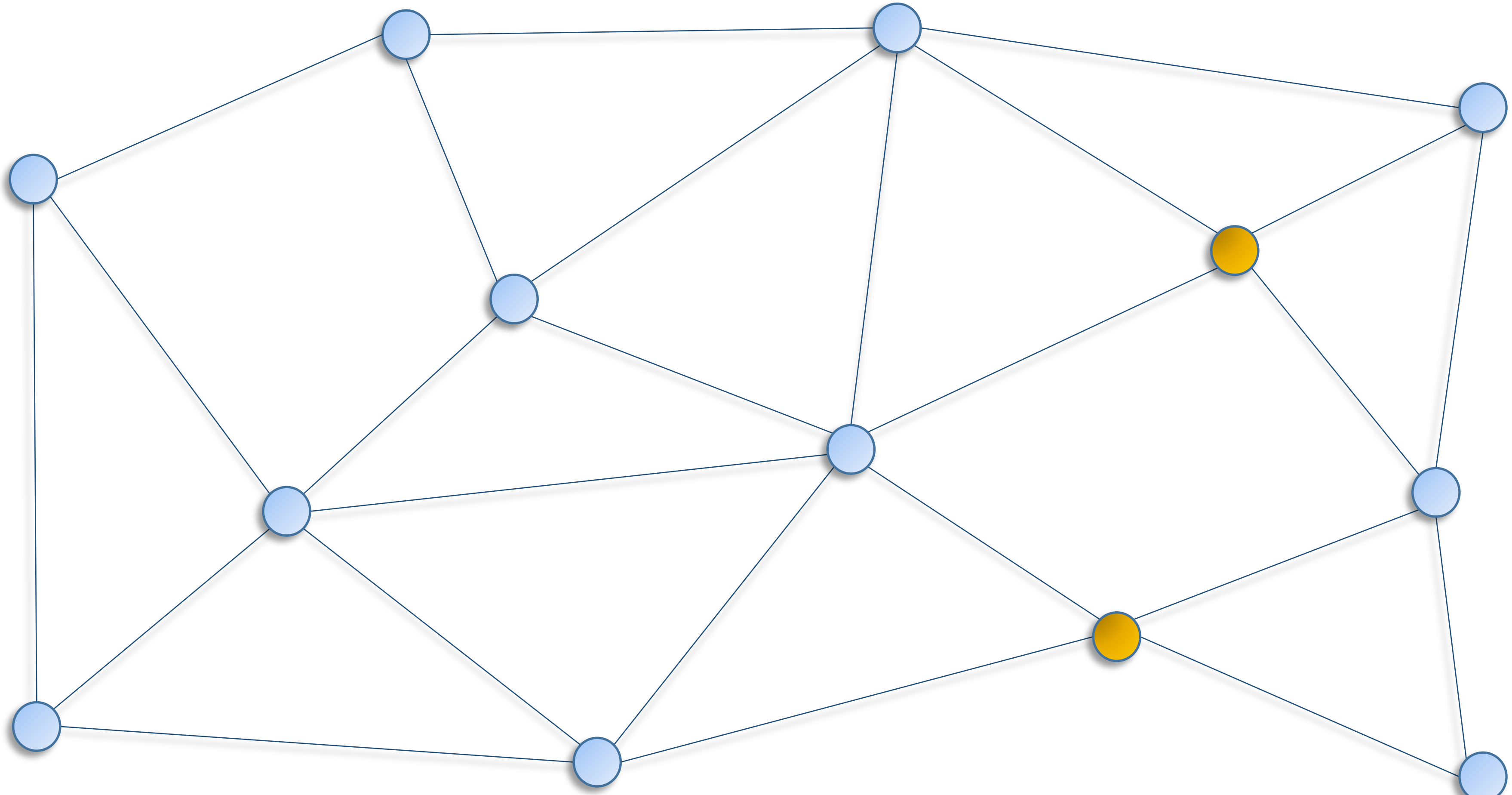


Processo estabilizado! Todo o grafo foi alcançado.

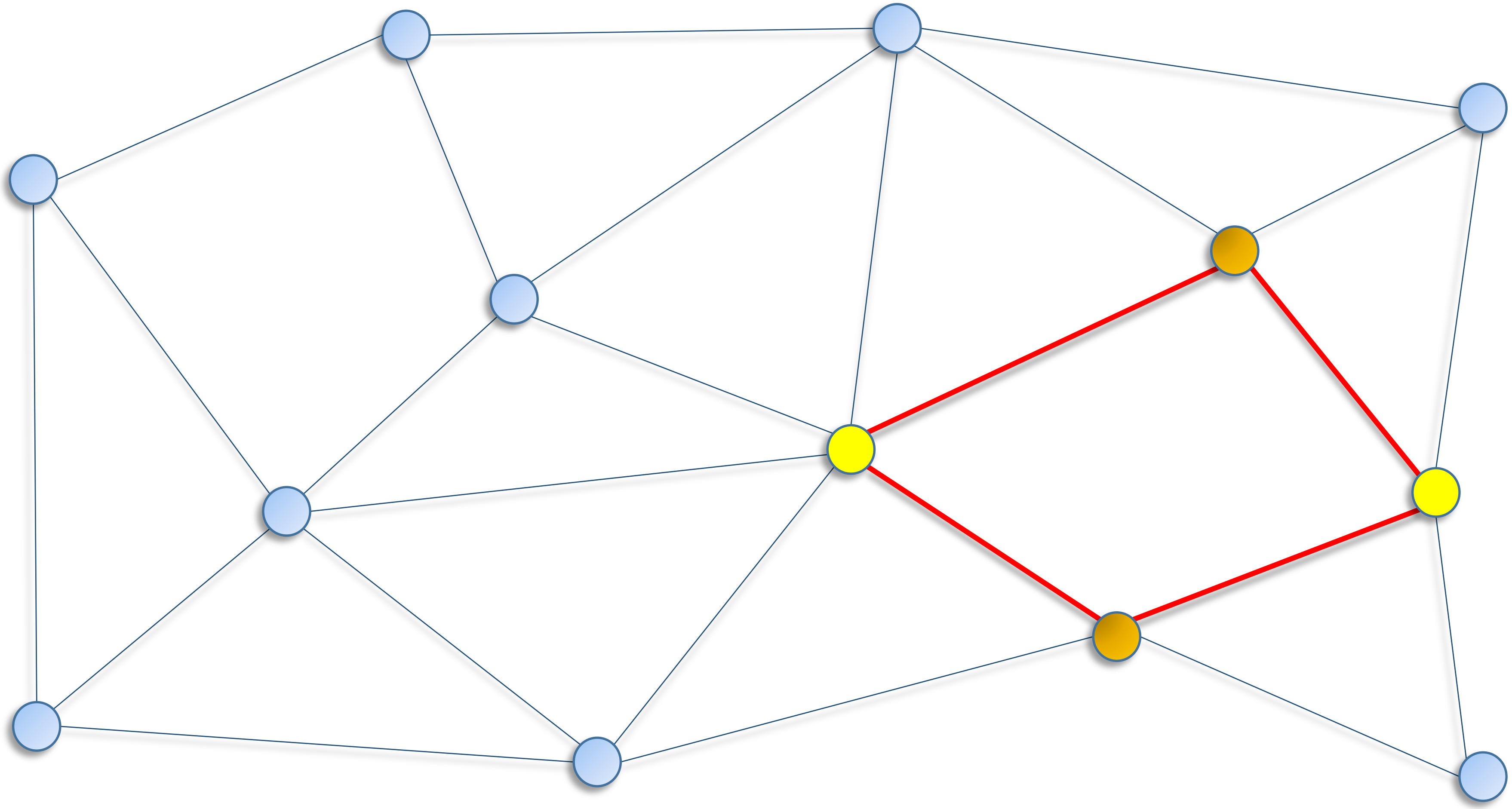
Disseminação de opinião: convexidade de vizinhanças com 2 elementos



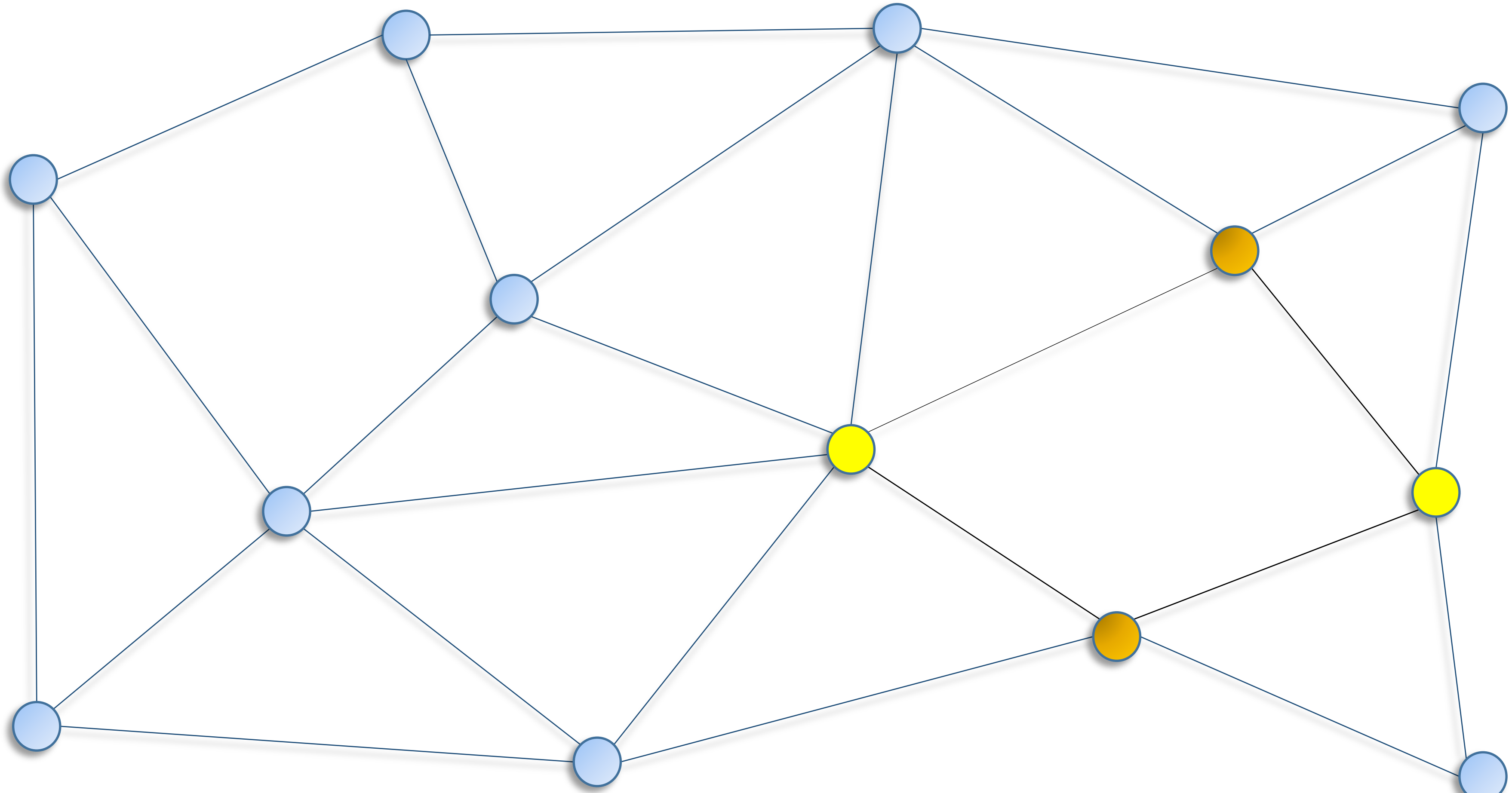
Convexidade P_3^*



Convexidade P_3^*



Convexidade P_3^*



Processo estabilizado!

Propriedades das convexidades P_3 e P_3^*

Propriedades das convexidades P_3 e P_3^*

Para qualquer conjunto $S \subseteq V(G)$, vale:

$$\mathrm{I}_{\mathrm{p3*}}(S) \subseteq \mathrm{I}_{\mathrm{p3}}(S)$$

Propriedades das convexidades P_3 e P_3^*

Para qualquer conjunto $S \subseteq V(G)$, vale:

$$\mathrm{I}_{\mathrm{p3*}}(S) \subseteq \mathrm{I}_{\mathrm{p3}}(S)$$

Para qualquer grafo G, vale:

$$\mathrm{in}_{\mathrm{p3}}(G) \leq \mathrm{in}_{\mathrm{p3*}}(G)$$
$$\mathrm{hn}_{\mathrm{p3}}(G) \leq \mathrm{hn}_{\mathrm{p3*}}(G)$$

Propriedades das convexidades P_3 e P_3^*

Para qualquer conjunto $S \subseteq V(G)$, vale:

$$\mathrm{I}_{\mathrm{p3*}}(S) \subseteq \mathrm{I}_{\mathrm{p3}}(S)$$

Para qualquer grafo G, vale:

$$\mathrm{in}_{\mathrm{p3}}(G) \leq \mathrm{in}_{\mathrm{p3*}}(G)$$
$$\mathrm{hn}_{\mathrm{p3}}(G) \leq \mathrm{hn}_{\mathrm{p3*}}(G)$$

Se G é um grafo livre de triângulos, as convexidades P_3 e P_3^* coincidem.

Propriedades das convexidades P_3 e P_3^*

Para qualquer conjunto $S \subseteq V(G)$, vale:

$$\mathrm{I}_{\mathrm{p3*}}(S) \subseteq \mathrm{I}_{\mathrm{p3}}(S)$$

Para qualquer grafo G, vale:

$$\mathrm{in}_{\mathrm{p3}}(G) \leq \mathrm{in}_{\mathrm{p3*}}(G)$$
$$\mathrm{hn}_{\mathrm{p3}}(G) \leq \mathrm{hn}_{\mathrm{p3*}}(G)$$

Se G é um grafo livre de triângulos, as convexidades P_3 e P_3^* coincidem.

Se G é um grafo de diâmetro dois, as convexidades P_3^* e geodésica coincidem.

Convexidades P_3 e P_3^* em grafos bipartidos

Teorema

Em grafos bipartidos, na convexidade P_3 (e, portanto, na P_3^*), determinar qualquer um dos parâmetros abaixo é NP-difícil:

- Número de Envoltória
- Número de Convexidade
- Número de Intervalo
- Número de Carathéodory
- Número de Radon
- Número de Helly
- Tempo de Percolação
- Tempo de Iteração
- Número de Posição Geral
- Posto

Teorema

Seja G_u o grafo obtido de um grafo não completo G pela adição de ℓ vértices universais. Então:

- $\mathrm{hn_g}(G_u) = \mathrm{hn_{p3*}}(G_u) = \mathrm{hn_{p3*}}(G)$
- $\mathrm{in_g}(G_u) = \mathrm{in_{p3*}}(G_u) = \mathrm{in_{p3*}}(G)$
- $\mathrm{con_g}(G_u) = \mathrm{con_{p3*}}(G_u) = \mathrm{con_{p3*}}(G) + \ell$
- $\ldots$

Relação entre as convexidades P_3^* e geodésica

Teorema

Nas convexidades P_3^* e geodésica, determinar cada um dos dez parâmetros abaixo é NP-difícil, em grafos com diâmetro dois:

- Número de Envoltória
- Número de Convexidade
- Número de Intervalo
- Número de Carathéodory
- Número de Radon
- Número de Helly
- Tempo de Percolação
- Tempo de Iteração
- Número de Posição Geral
- Posto

Convexidade em Grafos - Aula 04

Júlio Araújo, Mitre Dourado, Fábio Protti, Rudini Sampaio

CBM-2023, IMPA,
Rio de Janeiro, quinta, 27-Julho, 8h

No cardápio de hoje...

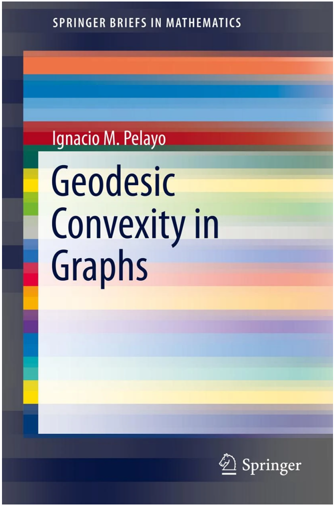
Capítulos 6 e 8:

- Breve revisão
- Convexidade Geodésica
- Números de Intervalo e de Envoltória
- Limitantes, Caracterizações, Complexidade
- Grafos Orientados

Capítulo 6

Convexidade Geodésica

Geodesic Convexity in Graphs, Prof. I. Pelayo, 2013



Foco em Complexidade

Primeiros trabalhos sobre Convexidade Geodésica na década de 80:

- Harary and Nieminem [1981]
- Everett and Seidman [1985]
- Farber and Jamison [1987]

Primeiro resultado de NP-completude:

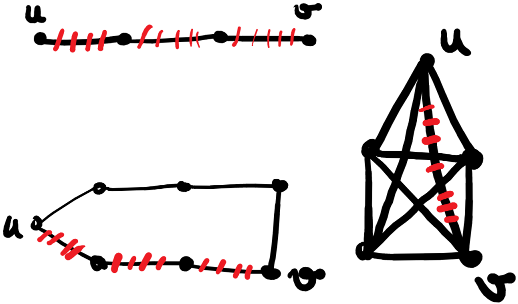
- Harary, Loukakis, and Tsouros [1993] (Número de Intervalo Geodésico)

Demais resultados de complexidade sobretudo a partir de:

- Dourado, Gimbel, Kratochvíl, Protti, and Szwarcfiter [2009] (Número de Envoltória Geodésico)

Geodésicas em um Grafo

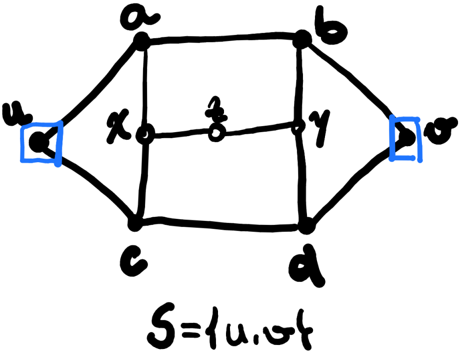
u, v-geodésica em um grafo $G \rightarrow u, v$-caminhos mínimos!



Função de Intervalo Geodésica

$$\mathrm{I_g}(S) = S \cup \{v \in V(G) \mid \exists u, w \in S (v \text{ em alguma } u, w\text{-geodésica em } G)\},$$

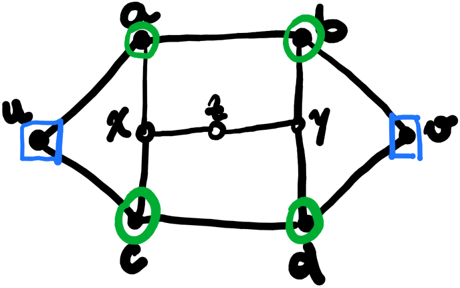
para todo $S \subseteq V(G)$.



Função de Intervalo Geodésica

$$\mathrm{I_g}(S) = S \cup \{v \in V(G) \mid \exists u, w \in S (v \text{ em alguma } u, w\text{-geodésica em } G)\},$$

$$\text{para todo } S \subseteq V(G).$$

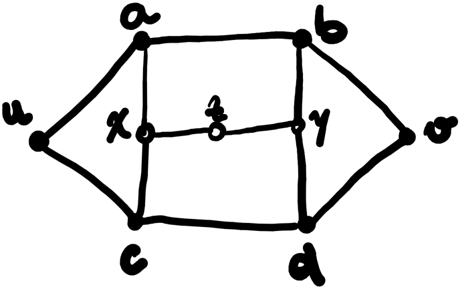


$I_g(\{u,v\}) = \{u, v, a, b, c, d\}$

Conjunto Geodesicamente Convexo

$S \subseteq V(G)$ é geodesicamente convexo se

$$I_g(S) = S.$$

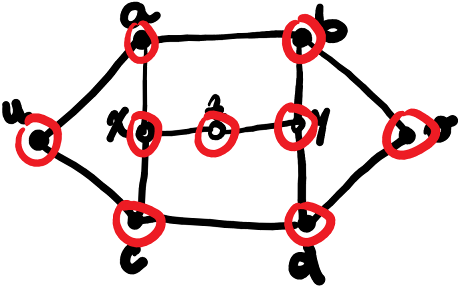


∅ é convexo?

Conjunto Geodesicamente Convexo

$S \subseteq V(G)$ é geodesicamente convexo se

$$I_g(S) = S.$$

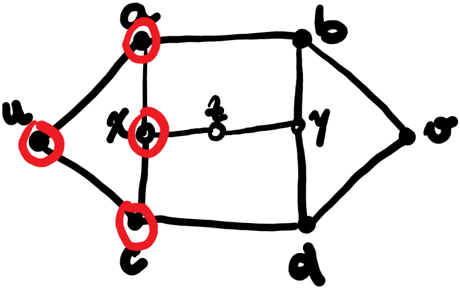


V(G) é convexo?

Conjunto Geodesicamente Convexo

$S \subseteq V(G)$ é geodesicamente convexo se

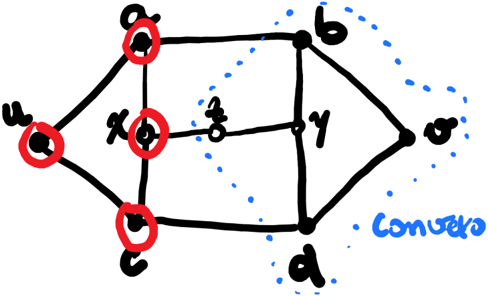
$$I_g(S) = S.$$



{u, a, x, c} é convexo?

Conjunto Geodesicamente Coconvexo

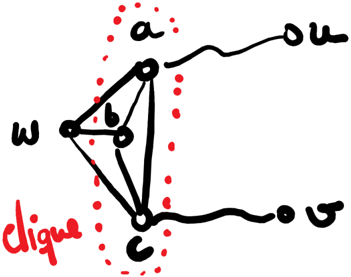
$S \subseteq V(G)$ é geodesicamente coconvexo se $V(G) \setminus S$ é (geod.) convexo.



$\{u, a, x, c\}$ é coconvexo!

Conjunto Geodesicamente Coconvexo

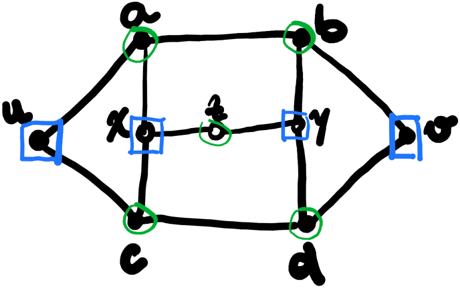
$S \subseteq V(G)$ é geodesicamente coconvexo se $V(G) \setminus S$ é (geod.) convexo.



w simplicial $\Rightarrow$ $\{w\}$ coconvexo!

Conjunto de Intervalo Geodésico

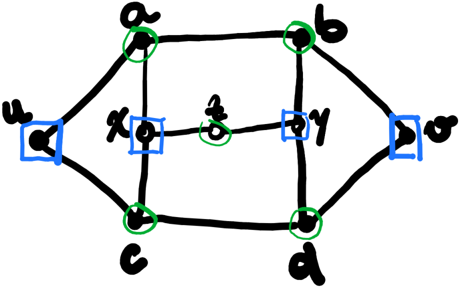
$S \subseteq V(G)$ é conjunto de intervalo geodésico se $\mathrm{I_g}(S) = V(G)$.



$\{u, v, x, y\}$ é conj. de intervalo ?

Número de Intervalo Geodésico

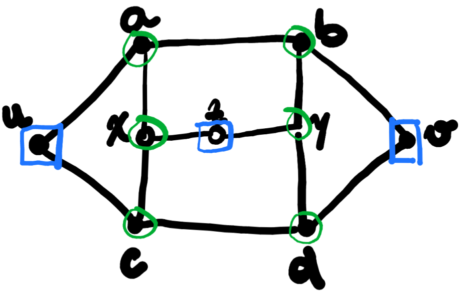
$$\text{in}_g(G) = \min\{|S| : S \text{ é conjunto de intervalo de } G\}$$



$in_g(G) \leq 4$?

Número de Intervalo Geodésico

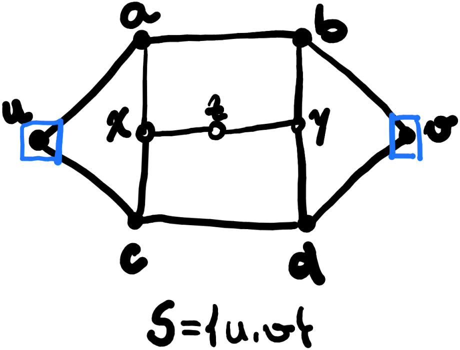
$$\mathrm{in_g}(G) = \min\{|S| : S \text{ é conjunto de intervalo de } G\}$$



$\mathrm{in_g}(G) = 3$!

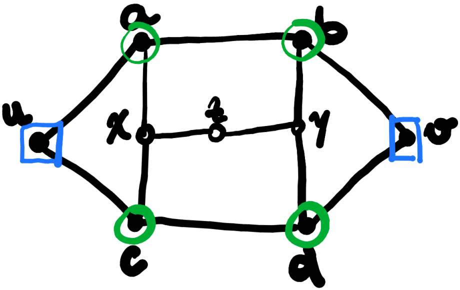
Envoltória Convexa Geodésica

$\mathrm{conv_g}(S) = H \subseteq V(G)$ é envoltória convexa de $S \subseteq V(G)$ se $S \subseteq H$, H é geodesicamente convexo e é menor conjunto, com respeito a inclusão.



Envoltória Convexa Geodésica

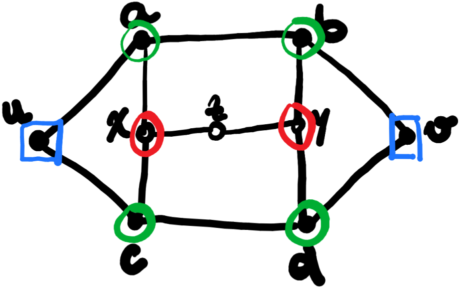
$\text{conv}_g(S) = H \subseteq V(G)$ é envoltória convexa de $S \subseteq V(G)$ se $S \subseteq H$, H é geodesicamente convexo e é menor conjunto, com respeito a inclusão.



$I_g(\{u,v\}) = \{u,v,a,b,c,d\}$

Envoltória Convexa Geodésica

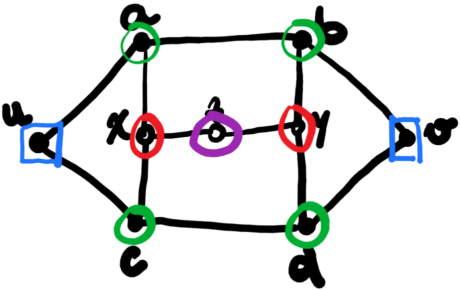
$\mathrm{conv}_g(S) = H \subseteq V(G)$ é envoltória convexa de $S \subseteq V(G)$ se $S \subseteq H$, H é geodesicamente convexo e é menor conjunto, com respeito a inclusão.



$I_g^2(\{u,v\}) = \{u,v,a,b,c,d,x,y\}$

Envoltória Convexa Geodésica

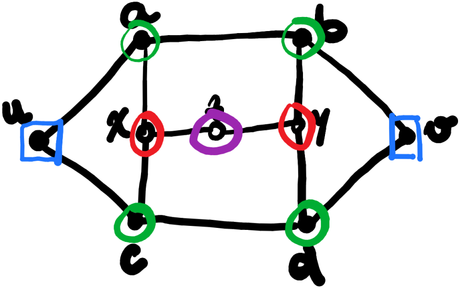
$\text{conv}_g(S) = H \subseteq V(G)$ é envoltória convexa de $S \subseteq V(G)$ se $S \subseteq H$, H é geodesicamente convexo e é menor conjunto, com respeito a inclusão.



$I_g^3(\{u,v\}) = \{u, v, a, b, c, d, x, y, z\}$

Conjunto de Envoltória Geodésico

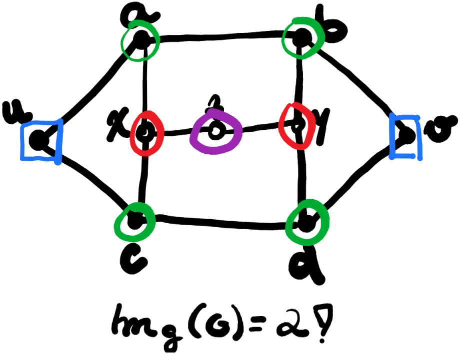
$S \subseteq V(G)$ é conjunto de envoltória geodésico se $\text{conv}_g(S) = V(G)$.



$I_g^3(\{u,v\}) = \{u,v,a,b,c,d,x,y,z\}$

Número de Envoltória Geodésico

$$\text{hn}_g(G) = \min\{|S| : S \text{ é conjunto de envoltória de } G\}$$



Limitantes

Teorema (Chartrand, Harary, and Zhang [2002b])

Se G é um grafo não trivial, então

$$2 \leq \mathrm{hn_g}(G) \leq \mathrm{in_g}(G) \leq n(G) - \mathrm{diam}(G) + 1.$$

Apertado para caminhos ou ciclos pares!

Limitantes podem estar distantes!

Teorema (Chartrand, Harary, and Zhang [2002b])

Para todos n, k e d números inteiros tais que $n - d - k + 1 \geq 0$, $2 \leq k \leq n$ e $2 \leq d \leq n$, existe um grafo G tal que $\mathrm{hn_g}(G) = \mathrm{in_g}(G) = k$, $\mathrm{diam}(G) = d$ e $n(G) = n$.

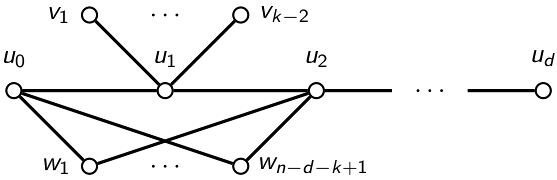


Figura: Grafo G_k.

Limitantes com outro ponto de partida

Teorema (Araújo, Campos, Giroire, Nisse, Sampaio, and Soares [2013])

Seja G um grafo conexo com n vértices e s vértices simpliciais. Então,

$$\mathrm{hn_g}(G) \leq \max\{1, s\} + \left\lceil \frac{3(n - \max\{1, s\})}{5} \right\rceil .$$

Além disso, esse limitante é apertado.

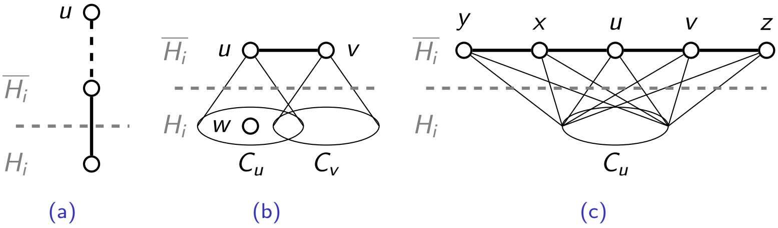


Figura: Análise de casos.

Dificuldade para Número de Intervalo Geodésico

- Grafos gerais. [Harary, Loukakis, and Tsouros, 1993]
- Cordal ou cordal bipartido. [Dourado, Protti, Rautenbach, and Szwarcfiter, 2010]
- Livre de P_5. [Dourado, Penso, and Rautenbach, 2016]
- Planares e grafos linha. [Chakraborty, Foucaud, Gahlawat, Ghosh, and Roy, 2020b]
- Subcúbicos. [Bueno, Penso, Protti, Ramos, Rautenbach, and Souza, 2018]
- Grades parciais subcúbicas e grafos de intervalos. [Chakraborty, Das, Foucaud, Gahlawat, Lajou, and Roy, 2020a]
- W[1]–difícil parametrizado por k, cobertura mínima por vértices e largura em caminho combinados. [Kellerhals and Koana, 2022]

NP-completude para Cordais

Teorema (Dourado, Protti, Rautenbach, and Szwarcfiter [2010])

Dados G grafo e k inteiro positivo, decidir se $\text{in}_\text{g}(G) \leq k$ *é* NP*–completo, mesmo que G seja cordal.*

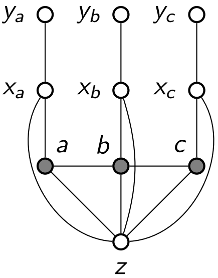


Figura: Construção de G' a partir de $G = P_3$. Vértices de G têm preenchimento de cor cinza.

Casos Tratáveis para Número de Intervalo Geodésico

O parâmetro $\mathrm{in}_g(G)$ pode ser calculado em tempo polinomial para:

- Cografos. [Dourado, Protti, Rautenbach, and Szwarcfiter, 2010]
- Split. [Dourado, Protti, Rautenbach, and Szwarcfiter, 2010]
- Ptolemaicos. [Farber and Jamison, 1986]
- Bloco cactos. [Ekim, Erey, Heggernes, van't Hof, and Meister, 2012]
- Periplanares. [Mezzini, 2018]
- Intervalos próprios. [Ekim, Erey, Heggernes, van't Hof, and Meister, 2012]

Em tempo FPT parametrizado pela:

- *Tree-depth*. [Kellerhals and Koana, 2022]
- *Feedback edge set number*. [Kellerhals and Koana, 2022]
- *Modular-width*. [Kellerhals and Koana, 2022]
- *Tree-width*. [Chakraborty, Das, Foucaud, Gahlawat, Lajou, and Roy, 2020a]

Algoritmo Polinomial para Cografos

Teorema (Dourado, Protti, Rautenbach, and Szwarcfiter [2010])

Se G é um cografo conexo e $\overline{G}$ possui k componentes conexas não triviais, cujos subgrafos induzidos pelo vértices destas componentes em G são $G_1, \ldots, G_k$, então:

1. *Se $k = 0$, então $\mathrm{in_g}(G) = n(G)$;*
2. *Se $k = 1$, então $\mathrm{in_g}(G) = \mathrm{in_g}(G_1)$;*
3. *Se $k \geq 2$, então $\mathrm{in_g}(G) = \min\{4, \min\{\mathrm{in_g}(G_i) \mid i \in \{1, \ldots, k\}\}\}$.*

Dificuldade para Número de Envoltória Geodésico

Decidir se $\mathrm{hn_g}(G) \leq k$ é NP-completo para:

- Grafos gerais. [Dourado, Gimbel, Kratochvíl, Protti, and Szwarcfiter, 2009]
- Bipartidos. [Araújo, Campos, Giroire, Nisse, Sampaio, and Soares, 2013]
- Cubos parciais. [Albenque and Knauer, 2016]
- Livres de P_9. [Dourado, Penso, and Rautenbach, 2016]

Decidir se $\mathrm{hn_g}(G) \leq k$ é:

- W[2]-difícil parametrizado por k. [Kanté, Marcilon, and Sampaio, 2019]
- W[1]-difícil parametrizado por $tw(G) + k$. [Kanté, Marcilon, and Sampaio, 2019]
- XP parametrizado por $tw(G)$. [Kanté, Marcilon, and Sampaio, 2019]

W[2]-dificuldade pelo Valor da Solução

Lema

Seja G um grafo livre de triângulos que não seja completo e seja G' o grafo obtido de G pela adição de um vértice universal v'. Então S é conjunto de envoltória mínimo na convexidade P_3 de G, se, e somente se, S é conjunto de envoltória mínimo na convexidade geodésica de G.

Teorema (Nichterlein, Niedermeier, Uhlmann, and Weller [2013])

Decidir se $\mathrm{hn}_{\mathrm{p3}}(G) \leq k$ *é* W[2]*–difícil parametrizado por* k*, mesmo quando restrito a grafos bipartidos de diâmetro 4.*

Corolário (Kanté, Marcilon, and Sampaio [2019])

Decidir se $\mathrm{hn}_{\mathrm{g}}(G) \leq k$ *é* W[2]*–difícil parametrizado por* k*, mesmo quando* G *tem diâmetro 2.*

Casos Tratáveis para o Número de Envoltória

O parâmetro $\mathrm{hn_g}(G)$ pode ser calculado em tempo polinomial para:

- Intervalos unitário, split, cografo. [Dourado, Gimbel, Kratochvíl, Protti, and Szwarcfiter, 2009]
- $(q, q-4)$-grafo, cobipartido, cacto. [Araújo, Campos, Giroire, Nisse, Sampaio, and Soares, 2013]
- Distância hereditária. [Kanté and Nourine, 2013]
- Livre de $\{paw, P_5\}$. [Dourado, Penso, and Rautenbach, 2016]
- Cada 6 vértices induzem ≤ 1 P_5. [Dourado, Penso, and Rautenbach, 2016]
- Livre de P_k e cintura $\geq k-1$. [Dourado, Penso, and Rautenbach, 2016]
- Prisma complementar. [Coelho, Coelho, Nascimento, and Szwarcfiter, 2022]

Algoritmo Polinomial para Cografos

Teorema (Dourado, Gimbel, Kratochvíl, Protti, and Szwarcfiter [2009])

Se G é um cografo conexo e $\overline{G}$ possui k componentes conexas não triviais, então:

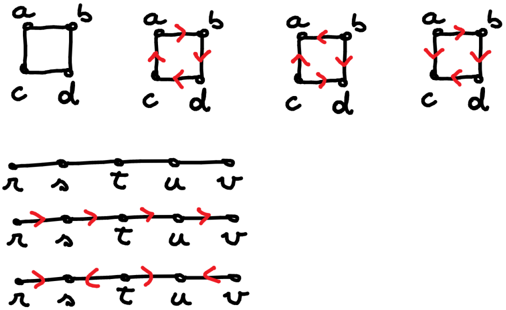
1. *Se $k = 0$, então $\mathrm{hn_g}(G) = n(G)$;*
2. *Se $k = 1$, então $\mathrm{hn_g}(G) = \mathrm{hn}(G_1)$, em que $G_1 \subseteq G$ é o subgrafo induzido pelos vértices da única componente não trivial de $\overline{G}$;*
3. *Se $k \geq 2$, então $\mathrm{hn_g}(G) = 2$.*

Capítulo 8

Convexidade em Grafos Orientados

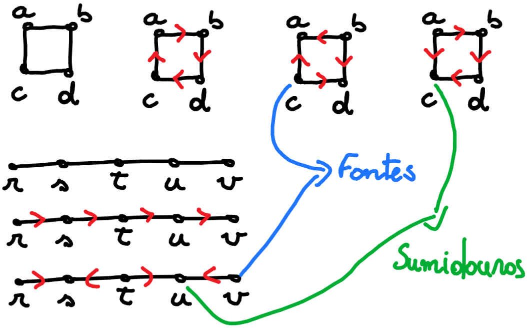
Grafos Orientados

Orientação de um grafo simples.



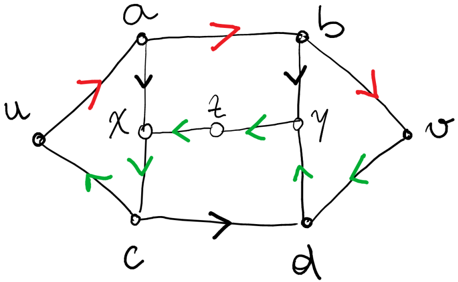
Grafos Orientados

Orientação de um grafo simples.



Caminhos Mínimos Direcionados

(u, v)-caminho mínimo $\neq$ (v, u)-caminho mínimo!



Convexidade Geodésica em Grafos Orientados

$$\overrightarrow{I}_{\mathrm{g}}(S) = \bigcup\{w \in V(D) \mid \exists u, v \in V(D)(w \text{ pertence a } (u,v)\text{-caminho mínimo})\}$$

(ou (v, u)-camínho mínimo)

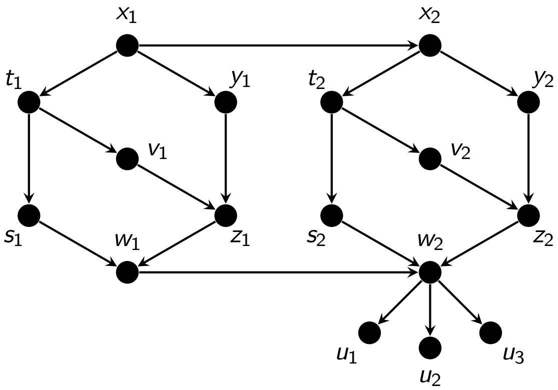


Figura: Grafo orientado D com $\overrightarrow{hn}_{\mathrm{g}}(D) = 4$ e $\overrightarrow{in}_{\mathrm{g}}(D) = 6$.

Histórico sobre Grafos Orientados

- Pouca literatura: *apenas* Geodésica e P_3.

- Dentre mais antigos artigos sobre Convexidade:
  Conjuntos $\overrightarrow{P_3}$-convexos em torneios [Erdős, Fried, Hajnal, and Milner, 1972, Moon, 1972]

- Geodésica em Grafos Orientados há 20 anos.
  [Chartrand and Zhang, 2000, Chartrand, Fink, and Zhang, 2003]

- Quase tudo relacionado aos números de intervalo e de envoltória.

Outros resultados

- *Número de convexidade* na convexidade geodésica.

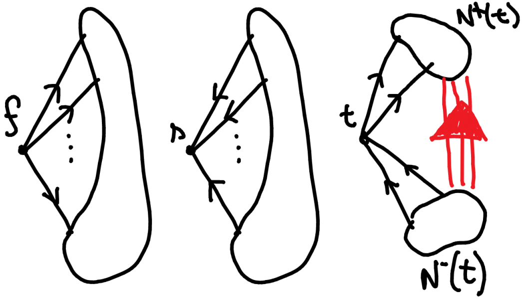
  [Chartrand, Fink, and Zhang, 2002a]

- *Posto* e os números de *Caratheodóry*, *Radon* e *Helly* na $\overrightarrow{P_3}$.

  [Parker, Westhoff, and Wolf, 2006, 2008, 2009, Parker and Westhoff, 2012]

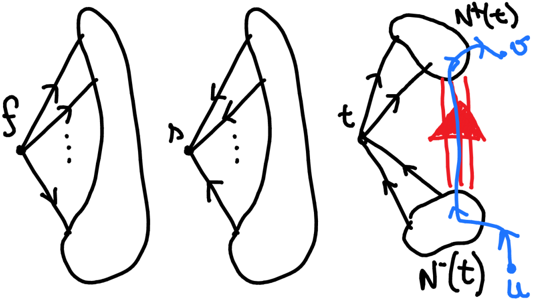
Vértices Extremos na Geodésica

Coconvexos triviais: fontes, sumidouros e transitivos.



Vértices Extremos na Geodésica

Coconvexos triviais: fontes, sumidouros e transitivos.



Limitantes, Caracterizações e Resultados Existenciais

Proposição (Chartrand et al. [2003], Chartrand and Zhang [2000])

Se D é um grafo orientado não trivial, então

$$\overrightarrow{\mathrm{hn}}_{\mathrm{g}}(D) \leq \overrightarrow{\mathrm{in}}_{\mathrm{g}}(D) \leq n(D) - \mathrm{diam}(D) + 1.$$

Esses limitantes são apertados.

Proposição (Chartrand et al. [2003])

Para cada par de inteiros a, b *com* $2 \leq a \leq b$*, existe um grafo orientado conexo D tal que* $\overrightarrow{\mathrm{hn}}_{\mathrm{g}}(D) = a$ *e* $\overrightarrow{\mathrm{in}}_{\mathrm{g}}(D) = b$.

Máximos e Mínimos dentre todas orientações

$$\mathsf{hn}^+(G) = \mathsf{max}\{\overrightarrow{\mathsf{hn}}_{\mathrm{g}}(D) \mid D \text{ orientação de } G\};$$
$$\mathsf{hn}^-(G) = \mathsf{min}\{\overrightarrow{\mathsf{hn}}_{\mathrm{g}}(D) \mid D \text{ orientação de } G\}.$$

$$\mathsf{gn}^+(G) = \mathsf{max}\{\overrightarrow{\mathsf{in}}_{\mathrm{g}}(D) \mid D \text{ orientação de } G\};$$
$$\mathsf{gn}^-(G) = \mathsf{min}\{\overrightarrow{\mathsf{in}}_{\mathrm{g}}(D) \mid D \text{ orientação de } G\}.$$

Espectros Geodésico e de Envoltória

Espectro geodésico de G: $S_g(G) = \{\overrightarrow{\mathrm{in}}_{\mathrm{g}}(D) \mid D$ orientação de $G\}$.

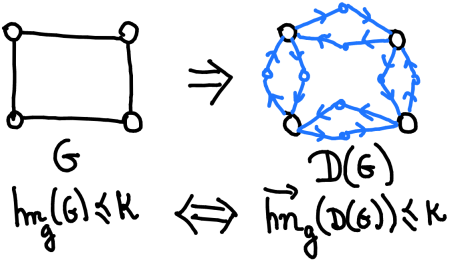
Espectro de envoltória de G: $S_h(G) = \{\overrightarrow{\mathrm{hn}}_{\mathrm{g}}(D) \mid D$ orientação de $G\}$.

O espectro é contínuo se igual a $\{2, \ldots, n(G)\}$.

Dificuldade para Número de Envoltória

Teorema (Araújo and Arraes [2022])

Dados um grafo orientado D e um inteiro positivo k, decidir se $\overrightarrow{\text{hn}}_g(D) \leq k$ é NP*-completo, mesmo se D é um cubo parcial orientado.*



Dificuldade para Número de Intervalo

Teorema (Araújo and Arraes [2022])

Decidir se $\overrightarrow{\text{in}}_g(D) \leq k$ *é* NP*–completo, não admite* $\mathcal{O}(\log n)$*–aproximação e é* W[2]*–difícil quando parametrizado por* k*, mesmo que* D *seja uma orientação acíclica de um grafo bipartido, cobipartido ou split.*

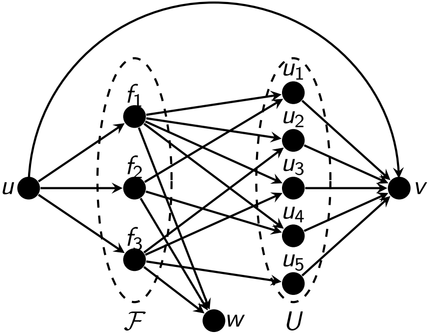


Figura: Grafo orientado $D(I)$, assumindo $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\mathcal{F} = \{F_1 = \{1, 2, 3, 4\}, F_2 = \{1, 4\}, F_3 = \{2, 3, 5\}\}$

Faixa de bônus

Mais alguns resultados em:
On the hull and interval numbers of oriented graphs

[Araújo, Maia, Medeiros, and Penso, 2023]

Pergunta

Qual a complexidade para determinar $\overrightarrow{\mathrm{in}}_{\mathrm{g}}(T)$, quando T é um torneio?

Obrigado pela atenção!

Referências I

M. Albenque and K. Knauer. Convexity in partial cubes: The hull number. *Discrete Mathematics*, 339(2):866–876, 2016. doi: 10.1016/j.disc.2015.10.032.

J. Araújo and P. S. M. Arraes. Hull and geodetic numbers for some classes of oriented graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 323:14–27, 2022. ISSN 0166-218X. doi: 10.1016/j.dam.2021.03.016.

J. Araújo, V. Campos, F. Giroire, N. Nisse, L. Sampaio, and R. Soares. On the hull number of some graph classes. *Theoretical Computer Science*, 475:1–12, 2013. ISSN 0304-3975. doi: 10.1016/j.tcs.2012.12.035.

J. Araújo, A. K. Maia, P. P. Medeiros, and L. D. Penso. On the hull and interval numbers of oriented graphs. 2023.

L. R. Bueno, L. D. Penso, F. Protti, V. R. Ramos, D. Rautenbach, and U. S. Souza. On the hardness of finding the geodetic number of a subcubic graph. *Information Processing Letters*, 135:22–27, 2018. doi: 10.1016/j.ipl.2018.02.012.

Referências II

D. Chakraborty, S. Das, F. Foucaud, H. Gahlawat, D. Lajou, and B. Roy. Algorithms and complexity for geodetic sets on planar and chordal graphs. In *ISAAC 2020*, LIPIcs, pages 7:1–7:15, 2020a. doi: 10.4230/LIPIcs.ISAAC.2020.7.

D. Chakraborty, F. Foucaud, H. Gahlawat, S. K. Ghosh, and B. Roy. Hardness and approximation for the geodetic set problem in some graph classes. In M. Changat and S. Das, editors, *Algorithms and discrete applied mathematics. 6th international conference, CALDAM 2020, Hyderabad, India, February 13–15, 2020.*, volume 12016 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 102–115. Springer, 2020b.

G. Chartrand and P. Zhang. The geodetic number of an oriented graph. *European Journal of Combinatorics*, 21(2):181–189, 2000. doi: 10.1006/eujc.1999.0301.

G. Chartrand, J. F. Fink, and P. Zhang. Convexity in oriented graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 116(1-2):115–126, 2002a. doi: 10.1016/S0166-218X(00)00382-6.

Referências III

G. Chartrand, F. Harary, and P. Zhang. On the geodetic number of a graph. *Networks*, 39(1):1–6, 2002b. doi: 10.1002/net.10007.

G. Chartrand, J. F. Fink, and P. Zhang. The hull number of an oriented graph. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 2003(36):2265–2275, 2003. doi: 10.1155/S0161171203210577.

E. M. M. Coelho, H. Coelho, J. R. Nascimento, and J. L. Szwarcfiter. A polynomial time algorithm for geodetic hull number for complementary prisms. *RAIRO-Theoretical Informatics and Applications*, 56:1, 2022. doi: 10.1051/ita/2022001.

M. C. Dourado, J. G. Gimbel, J. Kratochvíl, F. Protti, and J. L. Szwarcfiter. On the computation of the hull number of a graph. *Discrete Mathematics*, 309(18):5668–5674, 2009. doi: 10.1016/j.disc.2008.04.020. Combinatorics 2006, A Meeting in Celebration of Pavol Hell's 60th Birthday (May 1–5, 2006).

Referências IV

M. C. Dourado, F. Protti, D. Rautenbach, and J. L. Szwarcfiter. Some remarks on the geodetic number of a graph. *Discrete Mathematics*, 310(4):832–837, 2010. doi: 10.1016/j.disc.2009.09.018.

M. C. Dourado, L. D. Penso, and D. Rautenbach. On the geodetic hull number of pk-free graphs. *Theoretical Computer Science*, 640:52–60, 2016. doi: 10.1016/j.tcs.2016.05.047.

T. Ekim, A. Erey, P. Heggernes, P. van't Hof, and D. Meister. Computing minimum geodetic sets of proper interval graphs. In *LATIN 2012*, pages 279–290. Springer, 2012.

P. Erdős, E. Fried, A. Hajnal, and E. C. Milner. Some remarks on simple tournaments. *Algebra universalis*, 2:238–245, 1972. doi: 10.1007/BF02945032.

M. G. Everett and S. B. Seidman. The hull number of a graph. *Discrete Mathematics*, 57(3):217–223, 1985. doi: 10.1016/0012-365X(85)90174-8.

Referências V

M. Farber and R. E. Jamison. Convexity in graphs and hypergraphs. *SIAM Journal on Algebraic and Discrete Methods*, 7(3):433–444, 1986. doi: 10.1137/0607049.

M. Farber and R. E. Jamison. On local convexity in graphs. *Discrete Mathematics*, 66(3):231–247, 1987. doi: 10.1016/0012-365X(87)90099-9.

F. Harary and J. Nieminem. Convexity in graphs. *Journal of Differential Geometry*, 16(1):185–190, 1981.

F. Harary, E. Loukakis, and C. Tsouros. The geodetic number of a graph. *Mathematical and Computer Modelling*, 17(11):89–95, 1993. doi: 10.1016/0895-7177(93)90259-2.

M. M. Kanté and L. Nourine. Polynomial time algorithms for computing a minimum hull set in distance-hereditary and chordal graphs. In *SOFSEM 2013*, pages 268–279. Springer, 2013.

M. M. Kanté, T. Marcilon, and R. M. Sampaio. On the parameterized complexity of the geodesic hull number. *Theoretical Computer Science*, 791:10–27, 2019. ISSN 0304-3975. doi: 10.1016/j.tcs.2019.05.005.

Referências VI

L. Kellerhals and T. Koana. Parameterized complexity of geodetic set. *Journal of Graph Algorithms and Applications*, 26(4):401–419, 2022. doi: 10.7155/jgaa.00601.

M. Mezzini. Polynomial time algorithm for computing a minimum geodetic set in outerplanar graphs. *Theoretical Computer Science*, 745: 63–74, 2018. doi: 10.1016/j.tcs.2018.05.032.

J. W. Moon. Embedding tournaments in simple tournaments. *Discrete Mathematics*, 2(4):389–395, 1972. ISSN 0012-365X. doi: 10.1016/0012-365X(72)90016-7.

A. Nichterlein, R. Niedermeier, J. Uhlmann, and M. Weller. On tractable cases of target set selection. *Social Network Analysis and Mining*, 3(2): 233–256, 2013. doi: 10.1007/s13278-012-0067-7.

D. B. Parker and R. F. Westhoff. Convex invariants in multipartite tournaments. *Australasian Journal of Combinatorics*, 54:19–36, 2012.

D. B. Parker, R. F. Westhoff, and M. J. Wolf. Two-path convexity in clone-free regular multipartite tournaments. *Australasian Journal of Combinatorics*, 36:177–196, 2006.

Referências VII

D. B. Parker, R. F. Westhoff, and M. J. Wolf. On two-path convexity in multipartite tournaments. *European Journal of Combinatorics*, 29: 641–651, 2008. doi: 10.1016/j.ejc.2007.03.009.

D. B. Parker, R. F. Westhoff, and M. J. Wolf. Convex independence and the structure of clone-free multipartite tournaments. *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, 29(1):51–69, 2009. doi: 10.7151/dmgt.1432.

Convexidade em Grafos - Aula 05

Júlio Araújo, Mitre Dourado,
Fábio Protti, Rudini Sampaio

CBM-2023, IMPA,
Rio de Janeiro, sexta, 28-Julho, 8h

Capítulo 7

Outras Convexidades

- Convexidade monofônica
- Convexidade (de caminhos) triangulares
- Convexidade de todos os caminhos
- Convexidade de Steiner

Testar se um conjunto é convexo

- Convexidade dada pela família de conjuntos
- Convexidade geodésica
- Convexidade P_3

Testar se um conjunto é convexo

- Convexidade dada pela família de conjuntos
- Convexidade geodésica
- Convexidade P_3

Testar se um conjunto é convexo

- Convexidade dada pela família de conjuntos
- Convexidade geodésica
- Convexidade P_3

Testar se um conjunto é convexo

- Convexidade dada pela família de conjuntos
- Convexidade geodésica
- Convexidade P_3

Convexidade monofônica

- Um conjunto S de G é convexo na convexidade monofônica se S contém todos os vértices que pertencem a pelo menos um caminho induzido entre dois vértices de S
- Note que uma clique é um conjunto m-convexo.

Convexidade monofônica

- Um conjunto S de G é convexo na convexidade monofônica se S contém todos os vértices que pertencem a pelo menos um caminho induzido entre dois vértices de S
- Note que uma clique é um conjunto m-convexo.

Convexidade monofônica

Theorem

Um conjunto $S \subseteq V(G)$ é m-convexo se, e só se, para todo par de vértices não adjacentes $u, v \in S$ e toda componente conexa C de $G - S$, temos $V(C) \cap N(u) = \emptyset$ ou $V(C) \cap N(v) = \emptyset$.

- Considere que S é m-convexo
- Assuma por absurdo que existe um par de vértices não adjacentes $u, v \in S$ e uma componente conexa C de $G - S$, para os quais existem vértices u', v' tais que $u' \in V(C) \cap N(u)$ e $v' \in V(C) \cap N(v)$
- Seja P caminho mínimo de C entre u' e v' (u' pode ser igual a v')
- Portanto existe um caminho induzido ligando u e v o qual contém pelo menos um vértice fora de S, o que é uma contradição.

Convexidade monofônica

Theorem

Um conjunto $S \subseteq V(G)$ é m-convexo se, e só se, para todo par de vértices não adjacentes $u, v \in S$ e toda componente conexa C de $G - S$, temos $V(C) \cap N(u) = \emptyset$ ou $V(C) \cap N(v) = \emptyset$.

- Considere que S é m-convexo
- Assuma por absurdo que existe um par de vértices não adjacentes $u, v \in S$ e uma componente conexa C de $G - S$, para os quais existem vértices u', v' tais que $u' \in V(C) \cap N(u)$ e $v' \in V(C) \cap N(v)$
- Seja P caminho mínimo de C entre u' e v' (u' pode ser igual a v')
- Portanto existe um caminho induzido ligando u e v o qual contém pelo menos um vértice fora de S, o que é uma contradição.

Convexidade monofônica

Theorem

Um conjunto $S \subseteq V(G)$ é m-convexo se, e só se, para todo par de vértices não adjacentes $u, v \in S$ e toda componente conexa C de $G - S$, temos $V(C) \cap N(u) = \emptyset$ ou $V(C) \cap N(v) = \emptyset$.

- Considere que S é m-convexo
- Assuma por absurdo que existe um par de vértices não adjacentes $u, v \in S$ e uma componente conexa C de $G - S$, para os quais existem vértices u', v' tais que $u' \in V(C) \cap N(u)$ e $v' \in V(C) \cap N(v)$
- Seja P caminho mínimo de C entre u' e v' (u' pode ser igual a v')
- Portanto existe um caminho induzido ligando u e v o qual contém pelo menos um vértice fora de S, o que é uma contradição.

Convexidade monofônica

Theorem

Um conjunto $S \subseteq V(G)$ é m-convexo se, e só se, para todo par de vértices não adjacentes $u, v \in S$ e toda componente conexa C de $G - S$, temos $V(C) \cap N(u) = \emptyset$ ou $V(C) \cap N(v) = \emptyset$.

- Considere que S é m-convexo
- Assuma por absurdo que existe um par de vértices não adjacentes $u, v \in S$ e uma componente conexa C de $G - S$, para os quais existem vértices u', v' tais que $u' \in V(C) \cap N(u)$ e $v' \in V(C) \cap N(v)$
- Seja P caminho mínimo de C entre u' e v' (u' pode ser igual a v')
- Portanto existe um caminho induzido ligando u e v o qual contém pelo menos um vértice fora de S, o que é uma contradição.

Convexidade monofônica

Theorem

Um conjunto $S \subseteq V(G)$ é m-convexo se, e só se, para todo par de vértices não adjacentes $u, v \in S$ e toda componente conexa C de $G - S$, temos $V(C) \cap N(u) = \emptyset$ ou $V(C) \cap N(v) = \emptyset$.

- Considere agora que S não é m-convexo
- Seja $w_0 = u, w_1, \ldots, w_k, w_{k+1} = v$ um caminho induzido ligando vértices $u, v \in S$ tal que $k \geq 1$ e $w_i \notin S$ para algum $i \in \{1, \ldots, k\}$
- Seja j um índice tal que $w_{j-1} \in S$ e $w_j, w_{j+1}, \ldots, w_i \in V(G) \setminus S$. Tal índice existe uma vez que $u \in S$.
- Analogamente seja ℓ um índice tal que $w_i, w_{i+1}, \ldots, w_\ell \in V(G) \setminus S$ e $w_{\ell+1} \in S$.
- Isso implica que $w_{j-1}, w_{\ell+1}$ é um par de vértices não adjacentes de S e existe uma componente conexa C de $G - S$ tal que $V(C) \cap N(w_{j-1}) \neq \emptyset$ e $V(C) \cap N(w_{\ell+1}) \neq \emptyset$

Convexidade monofônica

Theorem

Um conjunto $S \subseteq V(G)$ é m-convexo se, e só se, para todo par de vértices não adjacentes $u, v \in S$ e toda componente conexa C de $G - S$, temos $V(C) \cap N(u) = \emptyset$ ou $V(C) \cap N(v) = \emptyset$.

- Considere agora que S não é m-convexo
- Seja $w_0 = u, w_1, \dots, w_k, w_{k+1} = v$ um caminho induzido ligando vértices $u, v \in S$ tal que $k \geq 1$ e $w_i \notin S$ para algum $i \in \{1, \dots, k\}$
- Seja j um índice tal que $w_{j-1} \in S$ e $w_j, w_{j+1}, \dots, w_i \in V(G) \setminus S$. Tal índice existe uma vez que $u \in S$.
- Analogamente seja ℓ um índice tal que $w_i, w_{i+1}, \dots, w_\ell \in V(G) \setminus S$ e $w_{\ell+1} \in S$.
- Isso implica que $w_{j-1}, w_{\ell+1}$ é um par de vértices não adjacentes de S e existe uma componente conexa C de $G - S$ tal que $V(C) \cap N(w_{j-1}) \neq \emptyset$ e $V(C) \cap N(w_{\ell+1}) \neq \emptyset$

Convexidade monofônica

Theorem

Um conjunto $S \subseteq V(G)$ é m-convexo se, e só se, para todo par de vértices não adjacentes $u, v \in S$ e toda componente conexa C de $G - S$, temos $V(C) \cap N(u) = \emptyset$ ou $V(C) \cap N(v) = \emptyset$.

- Considere agora que S não é m-convexo
- Seja $w_0 = u, w_1, \ldots, w_k, w_{k+1} = v$ um caminho induzido ligando vértices $u, v \in S$ tal que $k \geq 1$ e $w_i \notin S$ para algum $i \in \{1, \ldots, k\}$
- Seja j um índice tal que $w_{j-1} \in S$ e $w_j, w_{j+1}, \ldots, w_i \in V(G) \setminus S$. Tal índice existe uma vez que $u \in S$.
- Analogamente seja ℓ um índice tal que $w_i, w_{i+1}, \ldots, w_\ell \in V(G) \setminus S$ e $w_{\ell+1} \in S$.
- Isso implica que $w_{j-1}, w_{\ell+1}$ é um par de vértices não adjacentes de S e existe uma componente conexa C de $G - S$ tal que $V(C) \cap N(w_{j-1}) \neq \emptyset$ e $V(C) \cap N(w_{\ell+1}) \neq \emptyset$

Convexidade monofônica

Theorem

Um conjunto $S \subseteq V(G)$ é m-convexo se, e só se, para todo par de vértices não adjacentes $u, v \in S$ e toda componente conexa C de $G - S$, temos $V(C) \cap N(u) = \emptyset$ ou $V(C) \cap N(v) = \emptyset$.

- Considere agora que S não é m-convexo
- Seja $w_0 = u, w_1, \ldots, w_k, w_{k+1} = v$ um caminho induzido ligando vértices $u, v \in S$ tal que $k \geq 1$ e $w_i \notin S$ para algum $i \in \{1, \ldots, k\}$
- Seja j um índice tal que $w_{j-1} \in S$ e $w_j, w_{j+1}, \ldots, w_i \in V(G) \setminus S$. Tal índice existe uma vez que $u \in S$.
- Analogamente seja ℓ um índice tal que $w_i, w_{i+1}, \ldots, w_\ell \in V(G) \setminus S$ e $w_{\ell+1} \in S$.
- Isso implica que $w_{j-1}, w_{\ell+1}$ é um par de vértices não adjacentes de S e existe uma componente conexa C de $G - S$ tal que $V(C) \cap N(w_{j-1}) \neq \emptyset$ e $V(C) \cap N(w_{\ell+1}) \neq \emptyset$

Convexidade monofônica

Theorem

Um conjunto $S \subseteq V(G)$ é m-convexo se, e só se, para todo par de vértices não adjacentes $u, v \in S$ e toda componente conexa C de $G - S$, temos $V(C) \cap N(u) = \emptyset$ ou $V(C) \cap N(v) = \emptyset$.

- Considere agora que S não é m-convexo
- Seja $w_0 = u, w_1, \ldots, w_k, w_{k+1} = v$ um caminho induzido ligando vértices $u, v \in S$ tal que $k \geq 1$ e $w_i \notin S$ para algum $i \in \{1, \ldots, k\}$
- Seja j um índice tal que $w_{j-1} \in S$ e $w_j, w_{j+1}, \ldots, w_i \in V(G) \setminus S$. Tal índice existe uma vez que $u \in S$.
- Analogamente seja ℓ um índice tal que $w_i, w_{i+1}, \ldots, w_\ell \in V(G) \setminus S$ e $w_{\ell+1} \in S$.
- Isso implica que $w_{j-1}, w_{\ell+1}$ é um par de vértices não adjacentes de S e existe uma componente conexa C de $G - S$ tal que $V(C) \cap N(w_{j-1}) \neq \emptyset$ e $V(C) \cap N(w_{\ell+1}) \neq \emptyset$

Convexidade monofônica

Theorem

Um conjunto $S \subseteq V(G)$ é m-convexo se, e só se, para todo par de vértices não adjacentes $u, v \in S$ e toda componente conexa C de $G - S$, temos $V(C) \cap N(u) = \emptyset$ ou $V(C) \cap N(v) = \emptyset$.

- Considere agora que S não é m-convexo
- Seja $w_0 = u, w_1, \ldots, w_k, w_{k+1} = v$ um caminho induzido ligando vértices $u, v \in S$ tal que $k \geq 1$ e $w_i \notin S$ para algum $i \in \{1, \ldots, k\}$
- Seja j um índice tal que $w_{j-1} \in S$ e $w_j, w_{j+1}, \ldots, w_i \in V(G) \setminus S$. Tal índice existe uma vez que $u \in S$.
- Analogamente seja ℓ um índice tal que $w_i, w_{i+1}, \ldots, w_\ell \in V(G) \setminus S$ e $w_{\ell+1} \in S$.
- Isso implica que $w_{j-1}, w_{\ell+1}$ é um par de vértices não adjacentes de S e existe uma componente conexa C de $G - S$ tal que $V(C) \cap N(w_{j-1}) \neq \emptyset$ e $V(C) \cap N(w_{\ell+1}) \neq \emptyset$

Convexidade monofônica

Corollary

Seja G um grafo. Decidir se um conjunto $S \subseteq V(G)$ é m-convexo pode ser feito em tempo $O(nm)$.

- E encontrar o intervalo?
- E encontrar o fecho convexo?

Convexidade monofônica

Corollary

Seja G um grafo. Decidir se um conjunto $S \subseteq V(G)$ é m-convexo pode ser feito em tempo $O(nm)$.

- E encontrar o intervalo?
- E encontrar o fecho convexo?

Convexidade monofônica

Corollary

Seja G um grafo. Decidir se um conjunto $S \subseteq V(G)$ é m-convexo pode ser feito em tempo $O(nm)$.

- E encontrar o intervalo?
- E encontrar o fecho convexo?

Convexidade Triangular

- Em um *caminho triangular* $v_1, \ldots, v_t$ de um grafo G não existem arestas ligando vértices v_i e v_j tais que $|j - i| > 2$.
- Um conjunto $S \subseteq V(G)$ é convexo na *convexidade triangular* se S contém todos os vértices que pertencem a pelo menos um caminho triangular entre dois vértices de S.
- $\text{conv}_g(S) \subseteq \text{conv}_m(S) \subseteq \text{conv}_t(S)$
- $\text{conv}_{P_3}(S) \subseteq \text{conv}_t(S)$
- O que implica que todo conjunto t–convexo também é g–convexo, m–convexo e P_3–convexo.

Convexidade Triangular

- Em um *caminho triangular* $v_1, \ldots, v_t$ de um grafo G não existem arestas ligando vértices v_i e v_j tais que $|j - i| > 2$.
- Um conjunto $S \subseteq V(G)$ é convexo na *convexidade triangular* se S contém todos os vértices que pertencem a pelo menos um caminho triangular entre dois vértices de S.
- $\text{conv}_g(S) \subseteq \text{conv}_m(S) \subseteq \text{conv}_t(S)$
- $\text{conv}_{P_3}(S) \subseteq \text{conv}_t(S)$
- O que implica que todo conjunto t–convexo também é g–convexo, m–convexo e P_3–convexo.

Convexidade Triangular

- Em um *caminho triangular* $v_1, \ldots, v_t$ de um grafo G não existem arestas ligando vértices v_i e v_j tais que $|j - i| > 2$.
- Um conjunto $S \subseteq V(G)$ é convexo na *convexidade triangular* se S contém todos os vértices que pertencem a pelo menos um caminho triangular entre dois vértices de S.
- $\text{conv}_g(S) \subseteq \text{conv}_m(S) \subseteq \text{conv}_t(S)$
- $\text{conv}_{P_3}(S) \subseteq \text{conv}_t(S)$
- O que implica que todo conjunto t–convexo também é g–convexo, m–convexo e P_3–convexo.

Convexidade Triangular

- Em um *caminho triangular* $v_1, \ldots, v_t$ de um grafo G não existem arestas ligando vértices v_i e v_j tais que $|j - i| > 2$.
- Um conjunto $S \subseteq V(G)$ é convexo na *convexidade triangular* se S contém todos os vértices que pertencem a pelo menos um caminho triangular entre dois vértices de S.
- $\text{conv}_g(S) \subseteq \text{conv}_m(S) \subseteq \text{conv}_t(S)$
- $\text{conv}_{P_3}(S) \subseteq \text{conv}_t(S)$
- O que implica que todo conjunto t–convexo também é g–convexo, m–convexo e P_3–convexo.

Convexidade Triangular

- Em um *caminho triangular* $v_1, \ldots, v_t$ de um grafo G não existem arestas ligando vértices v_i e v_j tais que $|j - i| > 2$.
- Um conjunto $S \subseteq V(G)$ é convexo na *convexidade triangular* se S contém todos os vértices que pertencem a pelo menos um caminho triangular entre dois vértices de S.
- $\text{conv}_g(S) \subseteq \text{conv}_m(S) \subseteq \text{conv}_t(S)$
- $\text{conv}_{P_3}(S) \subseteq \text{conv}_t(S)$
- O que implica que todo conjunto t–convexo também é g–convexo, m–convexo e P_3–convexo.

Convexidade Triangular

Theorem

Um conjunto de vértices S de um grafo G é t–convexo se, e somente se, não existe vértice fora de S tendo dois vizinhos em S e não existem dois vértices não adjacentes de S que têm vizinhos numa mesma componente conexa de $G - S$.

Convexidade Triangular

Corollary

Um conjunto de vértices S de um grafo G é t–convexo se, e somente se, S é m–convexo e P_3–convexo.

- E encontrar o intervalo?
- E encontrar o fecho convexo?

Convexidade Triangular

Corollary

Um conjunto de vértices S de um grafo G é t–convexo se, e somente se, S é m–convexo e P_3–convexo.

- E encontrar o intervalo?
- E encontrar o fecho convexo?

Convexidade Triangular

Corollary

Um conjunto de vértices S de um grafo G é t–convexo se, e somente se, S é m–convexo e P_3–convexo.

- E encontrar o intervalo?
- E encontrar o fecho convexo?

Convexidade de todos os caminhos

- Um conjunto de vértices $S \subseteq V(G)$ é convexo na *convexidade de todos os caminhos* se S contém todos os vértices que pertencem a pelo menos um caminho entre dois vértices de S.

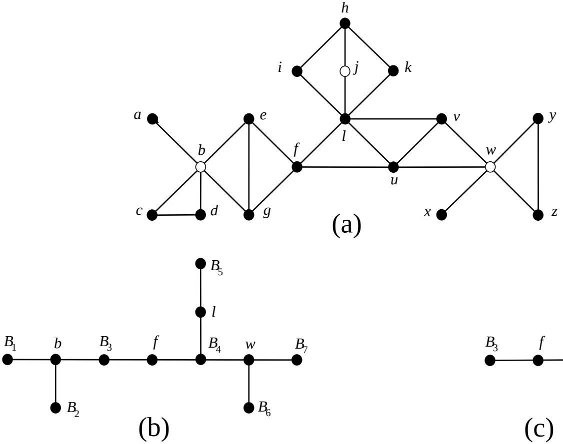
Convexidade de todos os caminhos

- Articulação
- Um bloco é uma aresta de corte ou um subgrafo 2-conexo maximal de G

Convexidade de todos os caminhos

- Articulação
- Um bloco é uma aresta de corte ou um subgrafo 2-conexo maximal de G

Convexidade de todos os caminhos



Convexidade de todos os caminhos

- Decomposição em blocos de um grafo G, representada pela *árvore bloco-articulação* T_G: cada vértice de T_G está associado a um bloco B_j ou a uma articulação $z_i \in V(G)$
- Existe uma aresta ligando um vértice B_j a um vértice z_i em T_G sempre que o bloco B_j contenha o vértice de corte $z_i \in V(G)$.

Convexidade de todos os caminhos

- Decomposição em blocos de um grafo G, representada pela *árvore bloco-articulação* T_G: cada vértice de T_G está associado a um bloco B_j ou a uma articulação $z_i \in V(G)$
- Existe uma aresta ligando um vértice B_j a um vértice z_i em T_G sempre que o bloco B_j contenha o vértice de corte $z_i \in V(G)$.

Convexidade de todos os caminhos

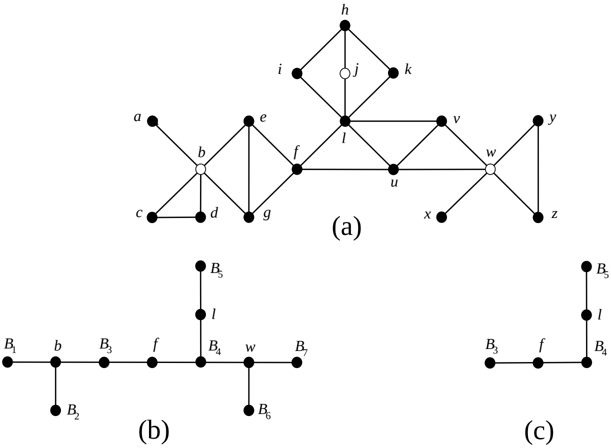


Figure: (a) Blocos $V(B_1) = \{a, b\}$, $V(B_2) = \{b, c, d\}$, $V(B_3) = \{b, e, g, f\}$, $V(B_4) = \{f, l, u, v, w\}$, $V(B_5) = \{h, i, j, k, l\}$, $V(B_6) = \{w, x\}$, $V(B_7) = \{w, y, z\}$

- Os vértices de T_G associados a blocos de G formam um conjunto independente, e o mesmo ocorre para os vértices de T_G associados a vértices de corte de G
- Além disso, cada folha de T_G representa um bloco de G. Um *bloco terminal* de G é um bloco associado a uma folha de T_G.
- Para um conjunto $S \subseteq V$, seja T_S a subárvore maximal de T_G tal que cada folha de T_S esteja associada a um bloco de G contendo um vértice de S que não seja um vértice de corte no subgrafo G_S induzido por $\cup_{B_j \in V(T_S)} B_j$.

- Os vértices de T_G associados a blocos de G formam um conjunto independente, e o mesmo ocorre para os vértices de T_G associados a vértices de corte de G
- Além disso, cada folha de T_G representa um bloco de G. Um *bloco terminal* de G é um bloco associado a uma folha de T_G.
- Para um conjunto $S \subseteq V$, seja T_S a subárvore maximal de T_G tal que cada folha de T_S esteja associada a um bloco de G contendo um vértice de S que não seja um vértice de corte no subgrafo G_S induzido por $\cup_{B_j \in V(T_S)} B_j$.

- Os vértices de T_G associados a blocos de G formam um conjunto independente, e o mesmo ocorre para os vértices de T_G associados a vértices de corte de G
- Além disso, cada folha de T_G representa um bloco de G. Um *bloco terminal* de G é um bloco associado a uma folha de T_G.
- Para um conjunto $S \subseteq V$, seja T_S a subárvore maximal de T_G tal que cada folha de T_S esteja associada a um bloco de G contendo um vértice de S que não seja um vértice de corte no subgrafo G_S induzido por $\cup_{B_j \in V(T_S)} B_j$.

Convexidade de todos os caminhos

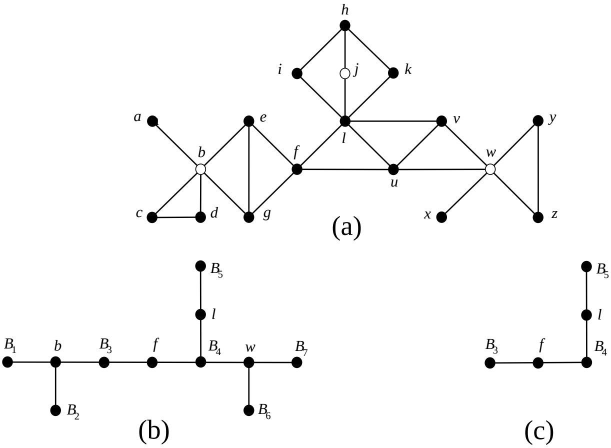


Figure: (a) $S = \{b, j, w\}$ e blocos $V(B_1) = \{a, b\}$, $V(B_2) = \{b, c, d\}$, $V(B_3) = \{b, e, g, f\}$, $V(B_4) = \{f, l, u, v, w\}$, $V(B_5) = \{h, i, j, k, l\}$, $V(B_6) = \{w, x\}$, $V(B_7) = \{w, y, z\}$

Convexidade de todos os caminhos

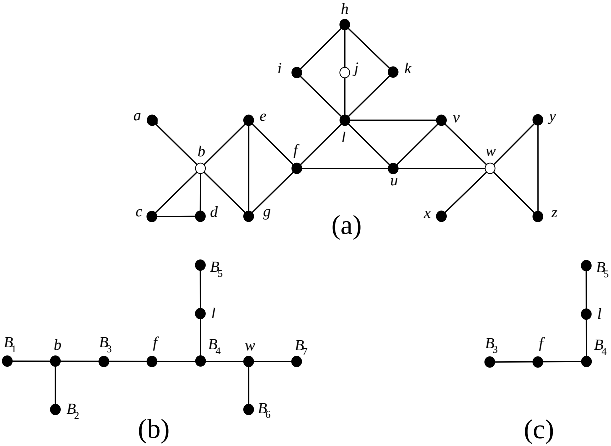


Figure: (b) árvore bloco-articulação T_G

Convexidade de todos os caminhos

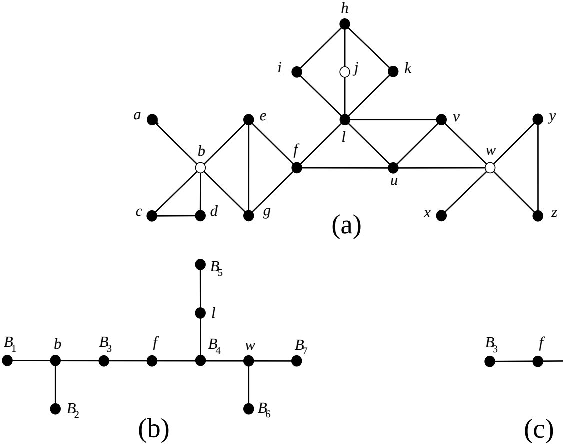


Figure: (c) subárvore T_S de T_G. O bloco B_3 é uma folha de T_S porque não contém nenhuma articulação no grafo G_S induzido por $V(B_3) \cup V(B_4) \cup V(B_5)$.

Lemma

Sejam $S \subseteq V$ e u, w dois vértices distintos em S, pertencentes aos blocos B_u e B_w de T_S respectivamente. Assuma que u e w não são articulações em G_S. Seja $B_{j_1} z_1 B_{j_2} z_2 \dots z_{k-1} B_{j_k}$ um caminho em T_S entre $B_{j_1} = B_u$ e $B_{j_k} = B_w$. Então, para cada $v \in \cup_{i=1}^{k} V(B_{j_i})$, existe um caminho P em G de u a w passando por v.

Convexidade de todos os caminhos

Theorem

Para qualquer grafo G, vale que:

$$\mathrm{con}_{\mathrm{tc}}(G) = \begin{cases} 1, & \textit{se } |V(G)| = 2 \textit{ ou } G \textit{ é } 2\textit{–conexo;} \\ n - b(G) + 1, & \textit{caso contrário.} \end{cases}$$

- $b(G) = \min\{b_j \mid B_j$ é um bloco terminal de $G\}$.

Convexidade de todos os caminhos

Theorem

Para qualquer grafo G, vale que:

$$\mathrm{in}_{\mathrm{tc}}(G) = \begin{cases} 1, & \textit{se } G \textit{ é trivial;} \\ 2, & \textit{se } |V(G)| = 2 \textit{ ou } G \textit{ é 2-conexo;} \\ eb(G), & \textit{caso contrário.} \end{cases}$$

- $eb(G)$ o número de blocos terminais de G.

Corollary

Para qualquer grafo G, vale $\mathrm{in}_{\mathrm{tc}}(G) = \mathrm{hn}_{\mathrm{tc}}(G)$.

Convexidade de todos os caminhos

Theorem

Para qualquer grafo G, vale que:

$$\mathrm{in}_{\mathrm{tc}}(G) = \begin{cases} 1, & \textit{se } G \textit{ é trivial;} \\ 2, & \textit{se } |V(G)| = 2 \textit{ ou } G \textit{ é 2-conexo;} \\ eb(G), & \textit{caso contrário.} \end{cases}$$

- $eb(G)$ o número de blocos terminais de G.

Corollary

Para qualquer grafo G, vale $\mathrm{in}_{\mathrm{tc}}(G) = \mathrm{hn}_{\mathrm{tc}}(G)$.

Convexidade de Steiner

- Dados G conexo e $S \subseteq V(G)$, seja T um subgrafo conexo de G com número mínimo de arestas que contenha todos os vértices de S
- É fácil ver que T é necessariamente uma árvore, chamada de *árvore de Steiner* de S
- Encontrar uma árvore de Steiner de um conjunto S é um problema amplamente estudado na literatura, pois generaliza o conceito de caminho mínimo

Convexidade de Steiner

- Dados G conexo e $S \subseteq V(G)$, seja T um subgrafo conexo de G com número mínimo de arestas que contenha todos os vértices de S
- É fácil ver que T é necessariamente uma árvore, chamada de *árvore de Steiner* de S
- Encontrar uma árvore de Steiner de um conjunto S é um problema amplamente estudado na literatura, pois generaliza o conceito de caminho mínimo

Convexidade de Steiner

- Dados G conexo e $S \subseteq V(G)$, seja T um subgrafo conexo de G com número mínimo de arestas que contenha todos os vértices de S
- É fácil ver que T é necessariamente uma árvore, chamada de *árvore de Steiner* de S
- Encontrar uma árvore de Steiner de um conjunto S é um problema amplamente estudado na literatura, pois generaliza o conceito de caminho mínimo

Convexidade de Steiner

- Um conjunto S é dito *St-convexo* se, para qualquer $S' \subseteq S$, os vértices de qualquer árvore de Steiner de S' pertencem a S. A família de todos os conjuntos St-convexos de um grafo G define uma convexidade chamada *convexidade de Steiner* de G