Limites de Sequências de Permutações

Rudini Menezes Sampaio[1], **Yoshiharu Kohayakawa**[1]

[1]Instituto de Matemática e Estatística – Universidade de São Paulo (IME-USP)
Rua do Matão, 1010 – Cidade Universitária – CEP 05508-090 – São Paulo – SP – Brazil

{rudini,yoshi}@ime.usp.br

Resumo. *Nesta tese, introduzimos um conceito novo de distância entre permutações e o conceito de sequência convergente de permutações. Provamos a equivalência entre esta noção de convergência e convergência nesta distância. Demonstramos também que qualquer sequência convergente possui como objeto limite natural uma função mensurável* $Z : [0,1]^2 \to [0,1]$ *cujas linhas são funções de distribuição acumulada. Introduzimos ainda um modelo bastante geral de permutação aleatória, baseado em objetos limite* Z*, que chamaremos permutação* Z*-aleatória, e provamos que permutações* Z*-aleatórias são convergentes e seu limite é* Z*. Com isso, estabelecemos o conceito de testabilidade para parâmetros de permutações, sobre a existência de certos algoritmos probabilísticos de tempo constante para estimação. Provamos uma caracterização para tais parâmetros e provamos a testabilidade e a não-testabilidade de vários parâmetros. Outros resultados como amostragem e quase-aleatoriedade para permutações também são provados. Estes resultados seguem de perto resultados similares em grafos obtidos por [Lovász and Szegedy 2006]. Para as provas, refinamos a versão de [Cooper 2006] para permutações do lema da regularidade de Szemerédi.*

1. Introdução

Imagine que nós temos uma permutação σ de inteiros tão grande que nós não conseguimos descrevê-la completamente de nenhuma forma. Tudo o que podemos fazer é pegar uma quantidade limitada de elementos de σ e observar a subpermutação induzida por eles. O que podemos saber sobre σ com isso? Podemos estimar algum parâmetro, como número de pontos fixos ou número de pares ordenados? Uma linha de pesquisa em Teoria da Computação e Aproximabilidade responde a esta pergunta: *testabilidade*. Diremos que os parâmetros de permutações que podem ser estimados dessa forma são *testáveis*, ou seja, são aqueles que possuem algoritmos aproximativos em tempo constante para sua estimação. Vários resultados de testabilidade já foram obtidos para grafos e outras estruturas e a principal ferramenta utilizada é o conhecido lema da regularidade de Szemerédi, que tem aplicações algorítmicas muito diretas. Nesta tese, nós desenvolvemos uma teoria geral de testabilidade para permutações.

Outro problema estudado nesta tese diz respeito a quase-aleatoriedade. Suponha que você tem uma sequência de permutações $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$, onde os tamanhos vão sempre aumentando. Nós definimos nesta tese algo bastante natural: uma sequência é quase-aleatória se no limite nenhuma subpermutação ocorre mais do que as outras. Esta definição está de acordo com trabalhos consagrados de quase-aleatoriedade para grafos e outras estruturas. Desta forma, é possível obtermos algoritmos simples para medir o quão aleatória é uma permutação. Nesta tese, nós provamos que nossa quase-aleatoriedade é equivalente às propriedades definidas por [Cooper 2006].

Para obtenção desses resultados, nós definimos um conceito novo de distância entre permutações, que reflete a similaridade tanto de propriedades locais como globais e é conveniente para nossos estudos de testabilidade. Tome, por exemplo, duas permutações aleatórias σ_1 e σ_2. As métricas conhecidas de permutações geralmente medem diferenças locais e, portanto, a distância entre σ_1 e σ_2 é grande. No entanto, σ_1 e σ_2 são bem parecidas estruturalmente. Nossa distância para elas será bem pequena, tendendo a zero.

Definiremos ainda um conceito bastante natural de convergência para uma sequência de permutações e provamos a existência de um objeto limite na forma de uma função Z em duas variáveis. A generalidade destes objetos nos permite definir permutações aleatórias muito abrangentes, que são por si só interessantes.

Unindo esses conceitos de distância e convergência com uma versão nossa do lema da regularidade de Szemerédi para permutações, temos o ferramental necessário para desenvolver toda uma teoria de testabilidade e quase-aleatoriedade para permutações[1].

2. Resultados principais

Dado $n > m > 0$, seja $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$. Seja $[n]^m_o$ o conjunto dos elementos x de $[n]^m$ cujas coordenadas estão em ordem crescente. Ou seja, $x = (x_1 < \cdots < x_n)$. Definimos $[0,1]^m_o$ da mesma forma, substituindo $[n]$ pelo intervalo $[0,1]$.

Uma permutação $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ é uma bijeção $\sigma : [n] \to [n]$. Dada uma permutação τ com $m < n$ elementos, dizemos que τ é uma subpermutação de σ se existe algum $x \in [n]^m_o$ tal que $\sigma(x_i) < \sigma(x_j)$ se e só se $\tau(i) < \tau(j)$. Por exemplo, $\tau = (3, 1, 4, 2)$ é uma subpermutação de $\sigma = (5, 6, 2, 4, 7, 1, 3)$ por causa da sequência $(5, 2, 7, 3)$ de σ que possui a mesma ordem relativa de τ. Seja $\Lambda(\tau, \sigma)$ o número de subpermutações de τ em σ. No exemplo anterior, $\Lambda(\tau, \sigma) = 2$ por causa das sequências $(5, 2, 7, 3)$ e $(6, 2, 7, 3)$. Seja $t(\tau, \sigma)$ a densidade de subpermutações de τ em σ, ou seja, $t(\tau, \sigma) = \Lambda(\tau, \sigma)/\binom{n}{m}$.

Com isso, introduzimos o conceito de sequência convergente de permutações.

Definição 1. *Dizemos que uma sequência (σ_i) de permutações $\sigma_i : [n_i] \to [n_i]$ é* convergente *se, para toda permutação τ, a sequência de números reais $(t(\tau, \sigma_i))$ converge.*

Por exemplo, com probabilidade 1, uma sequência de permutações (σ_i) aleatórias é convergente pois, para toda permutação $\tau : [m] \to [m]$, $(t(\tau, \sigma_i))$ converge para $1/m!$. Uma sequência de permutações identidade $\sigma_i = (1, 2, \dots, i)$, $i = 1, 2, \dots$, também é convergente, pois $(t(\tau, \sigma_i))$ converge para 1, se τ é uma identidade, e converge para 0, caso contrário.

Introduzimos ainda o conceito de distância retangular entre permutações. Observe que, intuitivamente, duas permutações aleatórias têm distância retangular pequena.

Definição 2. *Seja $I[n]$ o conjunto de todos os intervalos de $[n]$. Dadas duas permutações $\sigma_1, \sigma_2 : [n] \to [n]$, $n > 1$, definimos a distância retangular como*

$$d_{\square}(\sigma_1, \sigma_2) \;=\; \frac{1}{n} \max_{S,T \in I[n]} \Big| |\sigma_1(S) \cap T| - |\sigma_2(S) \cap T| \Big|,$$

[1]Agradecemos a Carlos Hoppen pelos conselhos e sugestões durante a confecção deste artigo

Note que nesta definição as permutações têm o mesmo tamanho. Na Seção 4, esta distância é generalizada para permutações de tamanhos diferentes. Com isso, enunciamos nosso primeiro resultado principal, caracterizando nossa definição de convergência.

Teorema 3. *Uma sequência de permutações* (σ_n) *é convergente se e só se* (σ_n) *é uma sequência de Cauchy na distância retangular.*

Nosso próximo resultado prova que, dada uma sequência convergente (σ_n) de permutações, existe um objeto limite que representa bem esta sequência. Nosso objeto limite é constituído de fdas (funções de distribuição acumulada), que neste artigo são funções $F : [0,1] \to [0,1]$ não decrescentes e contínuas à esquerda tais que $F(0) = 0$.

Definição 4 (Permutação limite)**.** *Uma* permutação limite *é uma função mensurável* $Z : [0,1]^2 \to [0,1]$ *que satisfaz as seguintes condições:*

(a) Para todo $x \in [0,1]$*,* $Z(x,\cdot)$ *é uma fda contínua em 0 e em 1*
(b) Para todo $y \in [0,1]$*,* $Z(\cdot,y)$ *é uma função mensurável e*

$$\int_0^1 Z(x,y)\,dx \;=\; y$$

Como exemplo de permutação limite, temos $Z_u : [0,1]^2 \to [0,1]$ onde todas as fdas são uniformes, ou seja, $Z_u(x,y) = y$ para todo $x, y \in [0,1]$, que claramente satisfaz a condição de massa. A Seção 4 fornece maiores explicações e exemplos de permutações limite. Também é possível estender a definição de densidade de subpermutações τ para permutações limite Z, a saber, $t(\tau, Z)$. Devido a sua complexidade, a equação matemática para $t(\tau, Z)$ será apresentada apenas na Seção 4. Com isso, podemos enunciar nosso segundo resultado principal: toda sequência convergente possui um objeto limite que determina todos os limites das densidades de subpermutações.

Teorema 5. *Seja* (σ_n) *uma sequência convergente de permutações. Então existe uma permutação limite* $Z : [0,1]^2 \to [0,1]$ *tal que, para toda permutação* τ*,*

$$\lim_{n\to\infty} t(\tau, \sigma_n) \;=\; t(\tau, Z).$$

O resultado seguinte está relacionado com um modelo bastante geral de permutação aleatória, baseado em permutações limite.

Definição 6 (Permutação Z-aleatória)**.** *Dada uma permutação limite* $Z : [0,1]^2 \to [0,1]$ *e* $n > 0$*, uma* permutação Z-aleatória $\sigma = \sigma(n, Z)$ *é gerada da seguinte forma: geramos aleatória e uniformemente* $(x_1 < \cdots < x_n)$ *em* $[0,1]^n$ *e geramos aleatoriamente* $(a_1, \ldots, a_n)$ *em* $[0,1]^n$ *segundo as fdas* $Z(x_1,\cdot), \ldots, Z(x_n,\cdot)$*. A permutação* σ *é obtida da ordem de* $(a_1, \ldots, a_n)$*, ou seja,* $\sigma(i) = |\{j : a_j \le a_i\}|$ *para todo* $i \in [n]$*.*

Por exemplo, se $n = 4$ e $a = (0.8, 0.2, 0.5, 0.3)$, então $\sigma = (4, 1, 3, 2)$. O Lema 14 da Seção 4 prova que, com probabilidade 1, os elementos em $(a_1, \ldots, a_n)$ são distintos e, portanto, $\sigma(n, Z)$ é mesmo uma permutação. Note que permutações aleatórias comuns são permutações Z_u-aleatórias.

Com isso, podemos enunciar nosso terceiro resultado principal: toda permutação limite Z é o limite de alguma sequência convergente de permutações.

Teorema 7. *Dada uma permutação limite* $Z : [0,1]^2 \to [0,1]$*, a sequência de permutações* $(\sigma(n, Z))$*,* $n \to \infty$*, é convergente com probabilidade 1 e seu limite é* Z*.*

Finalmente, nossos dois últimos resultados são aplicações dos anteriores, a saber, testabilidade e quase-aleatoriedade sobre permutações. Testabilidade está relacionada com a existência de algoritmos probabilísticos de complexidade constante para estimar um parâmetro de uma permutação.

Definição 8 (Parâmetros Testáveis de Permutações). *Dados $k < n$ e uma permutação σ em $[n]$, seja $sub(k, \sigma)$ uma permutação aleatória escolhida uniformemente entre as $\binom{n}{k}$ subpermutações de σ de tamanho k. Um parâmetro f de permutações é testável se, para todo $\varepsilon > 0$, existem inteiros $k = k(\varepsilon)$ e $n_0 = n_0(\varepsilon)$ tais que, se $\sigma : [n] \to [n]$ é uma permutação com $n > n_0 > k$, então*

$$\mathbb{P}\Big(|f(\sigma) - f(sub(k, \sigma))| > \varepsilon\Big) \ \leq \ \varepsilon.$$

Testabilidade foi introduzida em [Goldreich et al. 1998] para grafos e, desde então, têm sido obtidos resultados para várias estruturas discretas. Recentemente, [Alon et al. 2006] provaram caracterizações para propriedades testáveis de grafos.

Dado um parâmetro testável e um erro qualquer ε, considere o algoritmo que sorteia aleatoriamente uma subpermutação de tamanho $k = k(\varepsilon)$. Com alta probabilidade, esse algoritmo devolve uma boa estimativa para o parâmetro da permutação inteira. O ponto-chave aqui é a complexidade constante do algoritmo, que depende apenas de ε e não do tamanho da entrada.

Com isso, podemos enunciar nosso resultado sobre testabilidade, que nos fornece uma caracterização para parâmetros testáveis de permutações, ou seja, informa-nos que tipo de parâmetro de permutação pode ser estimado por tais algoritmos probabilísticos. Através deste resultado, provamos na Seção 5 a testabilidade e a não-testabilidade de alguns parâmetros clássicos de permutações.

Teorema 9. *Um parâmetro limitado f de permutações é testável se e só se, para toda sequência convergente (σ_n) de permutações, $(f(\sigma_n))$ converge.*

Todos os resultados acima foram motivados por resultados similares em grafos obtidos por [Lovász and Szegedy 2006] e [Borgs et al. 2006].

Podemos também enunciar nosso resultado de quase-aleatoriedade. Em 2004, Cooper definiu permutações quase-aleatórias baseado no conceito de discrepância. Nosso teorema abaixo prova que a quase-aleatoriedade de [Cooper 2004] está na mesma linha da quase-aleatoriedade de [Chung et al. 1989] para grafos.

Teorema 10. *Uma sequência (σ_n) de permutações é quase-aleatória [Cooper 2004] se e só se, para todo m e toda permutação $\tau : [m] \to [m]$, $t(\tau, \sigma_n)$ converge para $1/m!$*

Este resultado parece ser um passo importante para a prova da seguinte conjectura, baseada em R.L.Graham e [Cooper 2004]. A diferença com o teorema anterior é sobre a existência de um número fixo m tal que, testando todas as permutações de tamanho m, podemos garantir que a sequência é quase-aleatória. Resultados desse tipo existem para grafos e outras estruturas (ver [Chung et al. 1989] e [Lovász and Sós 2008]).

Conjectura 11. *Existe um inteiro $m > 3$ tal que ocorre o seguinte. Uma sequência (σ_n) de permutações é quase-aleatória [Cooper 2004] se e só se, para toda permutação $\tau : [m] \to [m]$, $t(\tau, \sigma_n)$ converge para $1/m!$*

3. Regularidade para Permutações

Para aplicações em teoria dos grafos, podemos representar qualquer permutação $\sigma : [n] \to [n]$ como um grafo bipartido G_σ com partes $A = B = [n]$, onde (a, b) é uma aresta se e só se $\sigma(a) < b$. Uma k-partição equilibrada $P = (C_i)_{i=1}^k$ de $[n]$ é constituída por intervalos C_i de $[n]$ de tamanhos quase iguais (a menos de um elemento). Seja $Q_{\sigma,P} : [k]^2 \to [0, 1]$ a matriz de densidades de arestas do grafo G_σ induzida por P. Tais matrizes provenientes de partições equilibradas de permutações serão chamadas de *permutações ponderadas*.

Permutações ponderadas são os objetos discretos que farão a transição entre permutações e objetos limite. Uma ferramenta fundamental para realizar a passagem de permutações simples para permutações ponderadas é o lema da regularidade de Szemerédi. Para isso, nós estendemos a distância retangular para permutações ponderadas e provamos uma associação do lema da regularidade com a distância retangular, que denominamos por regularidade fraca para permutações.

Teorema 12 (Regularidade para permutações)**.** *$\forall \varepsilon, \exists\ k = k(\varepsilon)$ tal que toda permutação σ possui uma k-partição equilibrada $P = (C_i)_{i=1}^k$ tal que*

$$d_\square(\sigma, Q_{\sigma,P}) \leq \varepsilon,$$

Grosso modo, qualquer permutação σ pode ser aproximadamente(ε) representada em tempo constante($k(\varepsilon)$), através da matriz $Q_{\sigma,P}$. Este nosso resultado é crucial para a prova do Teorema 5.

Podemos também estender a definição de densidade de subpermutação para permutações ponderadas. O seguinte lema relaciona a distância retangular e a densidade de subpermutações e é o primeiro passo para a prova dos Teoremas 3 e 17.

Lema 13 (Densidade $\times$ Distância)**.** *Seja $\tau : [m] \to [m]$ uma permutação qualquer e seja $n > 2m$. Então, dadas duas permutações ponderadas $Q_1, Q_2 : [n]^2 \to [0, 1]$, temos*

$$|t(\tau, Q_1) - t(\tau, Q_2)| \ \leq\ 2m^2 \cdot d_\square(Q_1, Q_2)$$

Para realizar a passagem de permutações ponderadas $Q : [k]^2 \to [0, 1]$ para objetos limite $Z : [0, 1]^2 \to [0, 1]$, utilizaremos na próxima seção a *função escada* $Z_Q : [0, 1]^2 \to [0, 1]$ tal que $Z_Q(x, y) = Q(\phi(x), \phi(y))$, onde $\phi : (0, 1] \to [k]$ mapeia o intervalo $((i-1)/k,\ i/k]$ no inteiro i. Claramente, como as linhas de Q são não decrescentes, temos que as linhas de Z_Q são fdas.

4. Permutações Limite

Na Definição 4 de permutação limite, a condição (b) é uma condição de "massa" e diz que a "soma" de todas as fdas em Z gera a fda "$y = x$". Outro exemplo, além de Z_u, é a permutação limite Z_{01} onde, para todo $x \in [0, 1]$, a fda $Z_{01}(x, \cdot)$ é formada apenas de duas descontinuidades: uma em x de tamanho $1 - p$ e outra em $1 - x$ de tamanho p, para algum $p \in [0, 1]$. Outro exemplo é a permutação limite Z_{du} onde, para todo $x \in [0, 1]$, a fda $Z_{du}(x, \cdot)$ tem uma descontinuidade em x de tamanho $1 - p$ e é uniforme nos demais pontos, para algum $p \in [0, 1]$. Se $p = 1$, temos Z_u. Não é difícil ver que Z_{01} e Z_{du} satisfazem a condição de massa.

O nosso lema abaixo é um dos principais sobre permutações limite e garante que não há conflitos na geração de permutações Z-aleatórias.

Lema 14. *Seja Z uma permutação limite. Então, para todo $\alpha \in [0,1]$, o conjunto dos pontos $x \in [0,1]$ tais que $Z(x,\cdot)$ é descontínua em α é de medida nula.*

Para a definição da densidade $t(\tau, Z)$ de subpermutações τ em uma permutação limite Z, são necessárias algumas notações. Sabe-se que toda fda F_1 tem associada uma medida de probabilidade de Lebesgue-Stieltjes μ_1 sobre os subconjuntos borelianos de $[0,1]$. Uma notação comum para a integral de Lebesgue-Stieltjes de uma função Borel-mensurável $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ sobre μ_1 é $\int_{[0,1]} g \; d\mu_1 = \int_{[0,1]} g \; dF_1$. Dadas k fdas $F_1, \ldots, F_k$, sejam $\mu_1, \ldots, \mu_k$ as medidas de probabilidade associadas. A medida-produto $\mu = \mu_1 \times \cdots \times \mu_k$ é também uma medida de probabilidade em $[0,1]^k$ sobre os subconjuntos borelianos de $[0,1]^k$ e uma notação comum para a integral de uma função Borel-mensurável $g : [0,1]^k \to \mathbb{R}$ sobre μ é $\int_{[0,1]^k} g \; d\mu = \int_{[0,1]^k} g \; dF_1 \cdots dF_k$ [Loève 1977]. Com isso, podemos definir $t(\tau, Z)$.

Definição 15 (Densidade de subpermutações em permutações limite)**.** *Dado $m > 1$, uma permutação $\tau : [m] \to [m]$ e uma permutação limite $Z : [0,1]^2 \to [0,1]$, definimos a densidade de subpermutações $t(\tau, Z)$ como*

$$t(\tau, Z) \;=\; m! \int_{[0,1]^m_o} \Big(\int_{[0,1]^m_o} dZ(x_{\tau^{-1}(1)}, \cdot) \cdots dZ(x_{\tau^{-1}(m)}, \cdot) \Big) dx_1 \cdots dx_m$$

A integral acima dentro do parêntesis é sobre o produto das medidas provenientes das fdas. Sejam $\mu_1, \ldots, \mu_m$ as medidas associadas às fdas $Z(x_{\tau^{-1}(1)}, \cdot), \ldots, Z(x_{\tau^{-1}(m)}, \cdot)$. O produto $\mu_\tau = \mu_1 \times \cdots \times \mu_m$ dessas medidas é uma medida em $[0,1]^m$ (o m-cubo unitário). O valor dessa integral é a medida μ_τ de $[0,1]^m_o$ (um m-simplexo do m-cubo). Como exemplo, se μ_τ é a medida de Lebesgue em $[0,1]^m$, é fácil verificar que a medida desse m-simplexo é igual a $\mu_\tau([0,1]^m_o) = 1/m!$.

O termo $m!$ vem do fato de que $\lambda([0,1]^m_o) = 1/m!$, onde λ é a medida de Lebesgue. Como exemplo simples, não é difícil ver que $t(\tau, Z_u) = 1/m!$.

Também podemos estabelecer uma distância retangular entre permutações limite.

Definição 16 (Distância retangular entre permutações limite)**.** *Dadas permutações limite $Z_1, Z_2 : [0,1]^2 \to [0,1]$, definimos a distância retangular como*

$$d_\square(Z_1, Z_2) \;=\; \sup_{\substack{x_1 < x_2 \in [0,1] \\ \alpha_1 < \alpha_2 \in [0,1]}} \Big| \int_{x_1}^{x_2} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} dZ_1(x,\cdot) dx - \int_{x_1}^{x_2} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} dZ_2(x,\cdot) dx \Big|$$

Uma observação interessante é que é possível estender facilmente as Definições 15 e 16 para funções escada Z_σ, para qualquer permutação σ. Não é difícil ver que $t(\tau, \sigma) = t(\tau, Z_\sigma)$. Também não é difícil ver que $d_\square(\sigma, \sigma') = d_\square(Z_\sigma, Z_{\sigma'})$ se σ e σ' são permutações do mesmo tamanho. Com isso, podemos definir a distância retangular entre permutações σ e σ' de tamanhos diferentes como $d_\square(\sigma, \sigma') = d_\square(Z_\sigma, Z_{\sigma'})$.

Com estas definições, provamos o resultado de unicidade abaixo, mostrando como nossa distância retangular se alinha com o conceito de densidade de subpermutações.

Teorema 17. *Dadas permutações limite Z_1 e Z_2, temos que $d_\square(Z_1, Z_2) = 0$ se e só se $t(\tau, Z_1) = t(\tau, Z_2)$ para toda permutação τ.*

5. Testabilidade

Como dito na Introdução, o Teorema 9 é uma caracterização para parâmetros testáveis de permutações. Em outras palavras, ele indica para quais parâmetros de permutações existem algoritmos probabilísticos que consigam estimá-los bem(ε) apenas tomando uma subpermutação aleatória de tamanho fixo $k(\varepsilon)$. Com esta caracterização, provamos a testabilidade e a não-testabilidade de alguns parâmetros.

Definição 18 (Pontos fixos, ciclos e máxima sequência ordenada)**.** *Seja $\sigma : [n] \to [n]$ uma permutação. Seja $pf(\sigma)$ a densidade de pontos fixos de σ, ou seja, o número de índices $i \in [n]$ tais que $\sigma(i) = i$ dividido por n. Seja $cic(\sigma)$ o número de ciclos de σ dividido por n. Um ciclo de σ é um subconjunto $\{c_1, \ldots, c_k\} \subseteq [n]$ tal que $\sigma(c_k) = c_1$ e $\sigma(c_i) = c_{i+1}$, para todo $i \in [n-1]$. Seja $ordmax(\sigma)$ o tamanho máximo de uma subsequência ordenada dividido por n.*

O corolário abaixo é uma aplicação simples do Teorema 9, tomando como contra-exemplo sequências convergentes sobre as quais o parâmetro não converge.

Corolário 19. *A densidade de pontos fixos $pf(\cdot)$, a densidade de ciclos $cic(\cdot)$ e a densidade da subsequência ordenada máxima $ordmax(\cdot)$ são parâmetros não-testáveis.*

Interessante é que o senso comum nos diz que é fácil estimar a densidade de pontos fixos de uma permutação. Basta selecionar pontos aleatórios e contar quantos deles são fixos. No entanto, segundo nossa definição de testabilidade, os algoritmos tomam subpermutações aleatórias, perdendo assim a informação de cada ponto na permutação original. Por exemplo, dada a permutação $(6, 1, 2, 3, 4, 5)$ sem pontos fixos, se selecionamos aleatoriamente as posições 2, 4 e 6, teremos a subsequência $(1, 3, 5)$, que gerará a subpermutação $(1, 2, 3)$, com três pontos fixos. Problema semelhante ocorre na estimação do número de ciclos.

Outros parâmetros de permutações podem ser estudados com relação a sua testabilidade. Seja S_n o conjunto de todas as permutações em $[n]$. Dada uma métrica d em S_n, o peso $w_d(\pi)$ de uma permutação $\pi \in S_n$ é definido como $w_d(\pi) = d(\pi, e)$, onde $e = (1, 2, \ldots, n)$ é a permutação identidade [Cameron and Wu 2007]. Essa noção de peso é útil para métricas d "invariantes à direita", ou seja, métricas tais que $d(\pi, \sigma) = d(\pi\tau, \sigma\tau)$ para todo $\pi, \sigma, \tau \in S_n$, onde $\pi\tau = (\pi(\tau(1)), \pi(\tau(2)), \ldots, \pi(\tau(n)))$ é uma permutação em S_n. Com isso, se d é invariante à direita, então $d(\pi, \sigma) = d(\pi\sigma^{-1}, e) = w_d(\pi\sigma^{-1})$.

Existem várias métricas invariantes à direita em S_n. Dados $\pi, \sigma \in S_n$, muitas delas contam o número mínimo de operações que levam π a σ. Entre as mais conhecidas podemos citar (juntamente com o tipo de operação permitida) [Deza and Huang 1998]:

- Hamming $dh(\pi, \sigma)$: operações de substituição de um elemento.
- Ulam $du(\pi, \sigma)$: operações "*remove um elemento e insere em outra posição*".
- Transposição $dt(\pi, \sigma)$: operações de transposição entre quaisquer dois elementos. Também é chamada distância de Cayley.
- Kendall-tau $dkt(\pi, \sigma)$: operações de transposição entre quaisquer dois elementos adjacentes.

Considere as distâncias dh, du e dt normalizadas por n e a distância dkt normalizada por $\binom{n}{2}$. Em [Deza and Huang 1998], também mencionam-se outras métricas invariantes à direita em S_n, a saber:

- L_1 (ou Spearman *footrule*): $l_1(\pi, \sigma) = \binom{n}{2}^{-1} \sum_{i=1}^{n} \left|\pi(i) - \sigma(i)\right|$

- L_2 (ou Spearman *rank correlation*): $l_2(\pi,\sigma) = \left(\frac{n(n^2-1)}{3}\right)^{-1} \sum_{i=1}^{n} \left(\pi(i) - \sigma(i)\right)^2$
- L_∞: $l_\infty(\pi,\sigma) = \frac{1}{n} \max_{1\le i\le n} \left|\pi(i) - \sigma(i)\right|$

Corolário 20. *Os pesos $w_{dh}(\cdot)$, $w_{du}(\cdot)$, $w_{dt}(\cdot)$ e $w_{l_\infty}(\cdot)$, referentes às distâncias de Hamming, de Ulam, de transposição e L_∞, são parâmetros não-testáveis de permutações. O peso $w_{dkt}(\cdot)$ referente à distância Kendall-tau é um parâmetro testável de permutações.*

Com relação as métricas L_1 e L_2, provamos o seguinte lema, que acreditamos ser um passo importante para provar a testabilidade dos pesos $w_{l_1}(\cdot)$ e $w_{l_2}(\cdot)$.

Lema 21. *Dada uma permutação limite $Z : [0,1]^2 \to [0,1]$, temos que os pesos $w_{l_1}(\sigma(n,Z))$ e $w_{l_2}(\sigma(n,Z))$ referentes às distâncias L_1 e L_2 sobre permutações Z-aleatórias convergem para $n \to \infty$ e os limites dependem apenas de Z.*

References

Alon, N., Fischer, E., Newman, I., and Shapira, A. (2006). A combinatorial characterization of the testable graph properties: It's all about regularity. *STOC2006*, pages 251–260.

Borgs, C., Chayes, J. T., Lovász, L., Sós, V. T., Szegedy, B., and Vesztergombi, K. (2006). Convergent sequences of dense graphs i: Subgraph frequencies, metric properties and testing. *Preprint*.

Cameron, P. J. and Wu, T. (2007). The complexity of the weight problem for permutation groups. *Eletronic Notes in Discrete Mathematics*, 28:109–116.

Chung, F., Graham, R., and Wilson, R. (1989). Quasi-random graphs. *Combinatorica*, 9:345–362.

Cooper, J. (2004). Quasirandom permutations. *Journal of Combinatorial Theory Series A*, 106:123–143.

Cooper, J. (2006). A permutation regularity lemma. *The Electronic Journal of Combinatorics*, 13.

Deza, M. and Huang, T. (1998). Metrics on permutations, a survey. *J. Comb. Inf. Sys. Sci.*, 23:173–185.

Goldreich, O., Goldwasser, S., and Ron, D. (1998). Property testing and its connection to learning and approximatio. *Journal ACM*, 45(4):653–750.

Loève, M. (1977). *Probability Theory I.* Springer-Verlag, fourth edition.

Lovász, L. and Sós, V. T. (2008). Generalized quasirandom graphs. *Journal of Combinatorial Theory Series B*, 98(1):146–163.

Lovász, L. and Szegedy, B. (2006). Limits of dense graph sequences. *J. Comb. Theory B*, 96:933–957.